学習用テキスト 非線形計画法 (1)

２次計画問題

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

線形関数で表された制約条件をみたし，２次の目的関数を最小化する問題を２次計画問題という．２次計画問題の目的関数が凸関数である場合について，その問題の最適解であるための必要十分条件を解説する．また，双対問題を導入し，線形計画問題の場合と同じように，弱双対定理と双対定理が成り立つことを示す．そして，凸２次計画問題を解く主双対内点法のパス追跡アルゴリズムについても解説する．

目次

1 ２次計画問題

1.1 ２次計画問題の例

ここでは, 次のポートフォリオ選択問題が２次計画問題に定式化できることを説明する.

問題 1.1 (ポートフォリオ選択問題) n 種の金融資産 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ からなる市場において，ポートフォリオを組み，一定の期間運用する．ここで，ポートフォリオとは，資金 w をそれぞれの資産 S_i に x_i の割合で投資したもののことである．ただし，各資産への投資

割合 x_i は非負であり，その和 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ が 1 であるとする．

資産 S_i の現在価格を p_i とし，期末の未知の価格を $\tilde{p}_i$ とするとき，$r_i = \frac{\tilde{p}_i - p_i}{p_i}$ を資産 S_i の収益率という．この収益率 r_i を確率変数とみることができ，その期待値 $\bar{r}_i$ と分散 σ_i^2 が既知であるとする．また，資産 S_i と S_j の収益率 r_i と r_j の共分散 $\sigma_{ij}(\sigma_{ii} = \sigma_i^2)$ も既知であるとする．各資産 $S_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に x_i の割合で投資したポートフォリオの収益率を r とするとき，その期待値が μ 以上となる条件のもとで，収益率 r の分散が最小となるポートフォリオを求める問題を定式化せよ．

各資産 $S_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に x_i の割合で投資したポートフォリオの収益率は

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{p}_i}{p_i} w x_i - \sum_{i=1}^{n} w x_i}{\sum_{i=1}^{n} w x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{p}_i - p_i}{p_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x}$$

と表すことができ，これは確率変数となる．ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$ である．この収益率 r の期待値を $\bar{r}$ とすれば，期待値の線形性から

$$\bar{r} = \bar{\boldsymbol{r}}^T \boldsymbol{x}$$

となる．ここで，$\bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_n)^T$ である．また，この収益率 r の分散を σ^2 とすれば

$$\sigma^2 = \boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x}$$

となる．ここで，$n \times n$ 行列 Σ は，第 ij 要素を σ_{ij} とする分散共分散行列である．以上のことから，収益率の期待値が μ 以上となる条件のもとで，分散が最小となるポートフォリオを求める問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} \geq \mu \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

と定式化できる．これは，次節以降で説明する 2 次計画問題となっている．また，分散共分散行列 Σ が対称な半正定値行列であるので，目的関数が凸関数であり，凸 2 次計画問題となっている．

1.2 制約のない凸 2 次計画問題

制約のない 2 次計画問題は

$$\text{最小化} \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \tag{1}$$

と表され，2 次関数の最小化問題である．ここで，n を自然数するとき，$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ が定数行列，$\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ が定数ベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ が変数ベクトルである．この問題に対して，次の仮定を置く．

仮定 1.2 正方行列 $\boldsymbol{Q}$ が対称である．

仮定 1.3 正方行列 $\boldsymbol{Q}$ が半正定値である，すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \geq 0$ が成立する．

任意の n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，対称行列 $\boldsymbol{Q}$ が存在し

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

となるので (演習問題)，仮定 1.2 は一般に成立するとしてもよい．仮定 1.3 より，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数となる (演習問題) ので，問題 (1) を制約のない凸 2 次計画問題と呼ぶ．

補足説明 1.4 ここで，関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が**凸関数** (convex function) であるとは，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{R}^n$ と $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$f(\theta\boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2) \leq \theta f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\theta)f(\boldsymbol{x}_2)$$

が成立することをいう．関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が 2 回連続微分可能なとき，$\nabla^2 f$(ヘッセ行列) が任意の点で半正定値ならば f は凸関数である．

$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が制約のない凸 2 次計画問題 (1) の最適解である必要十分条件は，関数 f の勾配ベクトルがゼロとなる条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

が成り立つことである．

例 1.5 次の制約のない凸 2 次計画問題

$$\text{最小化} \quad (x_1 - 4)^2 + x_1x_2 + 2(x_2 - 3)^2 \tag{3}$$

の最適解は，(2) より

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 12 = 0 \end{aligned}$$

を満たす．この連立一次方程式を解くことにより，問題 (3) の最適解 $x_1 = \frac{20}{7}$，$x_2 = \frac{16}{7}$ と，そのときの最適値 $\frac{62}{7}$ が得られる．

演習問題 1.6 任意の n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，対称行列 $\boldsymbol{Q}$ が存在し

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

となることを示せ.

演習問題 1.7 対称行列 $\boldsymbol{Q}$ が半正定値であるならば，2次関数

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

が凸関数となることを示せ．また，逆に，上の2次関数 f が凸関数であるならば，対称行列 $\boldsymbol{Q}$ が半正定値となることを示せ.

演習問題 1.8 次の2次関数が凸関数であるかどうか調べよ.

(1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$.

(2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1 x_2 + 2x_2^2$.

1.3 線形等式制約のみを持つ凸２次計画問題

線形の等式制約のみを持つ2次計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array} \tag{4}$$

と表される．ここで，m と n を自然数するとき，$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ と $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ が定数行列，$\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ が定数ベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ が変数ベクトルである．前節と同じように，仮定 1.2 と 1.3 が成り立つとする．このとき，問題 (4) を線形等式制約のみを持つ凸2次計画問題と呼ぶ.

定理 1.9 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸2次計画問題 (4) の最適解である必要十分条件は，ある $\boldsymbol{y}^* \in \mathcal{R}^m$ が存在し

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^* & = & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* & = & \boldsymbol{b} \end{array} \tag{5}$$

が成り立つことである.

証明 $\boldsymbol{x}^*$ が問題 (4) の最適解であると仮定する．このとき，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$ である．$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす任意の $\Delta\boldsymbol{x}$ と任意の $\alpha \in \mathcal{R}$ に対して $\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$ が実行可能解となるので，

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) \geq \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*$$

が成立する．これを整理すると

$$\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}\right)^T\Delta\boldsymbol{x}\geq 0$$

が得られる．任意の正の $\alpha > 0$ に対して，上式が成立するので

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\Delta\boldsymbol{x}\geq 0$$

となる (演習問題)．同様に，任意の負の $\alpha < 0$ に対しても成立するので

$$-(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\Delta\boldsymbol{x}\geq 0$$

となる．上の 2 つの不等式より

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\Delta\boldsymbol{x}= 0$$

が得られる．これが，$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=0$ をみたす任意の $\Delta\boldsymbol{x}$ に対して成り立つので，ベルトル $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}$ は，部分空間 $\ker\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ の直交補空間 $\mathrm{image}\boldsymbol{A}^T=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\}$ 上にある．したがって，ある $\boldsymbol{y}^*\in\mathcal{R}^m$ が存在し，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^*$ となる．また，制約条件より $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}$ となるので，(5) が成立する．

逆に，ある $\boldsymbol{y}^*\in\mathcal{R}^m$ が存在し，(5) が成立すると仮定する．このとき，$\boldsymbol{x}^*$ は問題 (4) の制約条件を満たす．問題 (4) の制約条件を満たす任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\right)\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)+(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}^*\\&\geq(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^*)^T\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^*)^T\boldsymbol{x}^*\\&=(\boldsymbol{y}^*)^T\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{y}^*)^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

が成立するので，$\boldsymbol{x}^*$ は，問題 (4) の最適解である．ここで，上の不等式は，$\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列であることと $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^*$ から導かれる． ▌

上の定理の条件 (5) にある第 1 式 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^*$ は，目的関数の勾配ベクトルが実行可能領域を表す面に直交していると解釈することができる．

例 1.10 次の線形等式制約のみを持つ凸 2 次計画問題

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & (x_1-4)^2+x_1x_2+2(x_2-3)^2\\ \text{制約条件} & 2x_1+x_2=2\end{array}\qquad(6)$$

あるいは，行列表現した

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-8, -12)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 34 \\
\text{制約条件} & (2, 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2
\end{array}
$$

の最適解は，(5) より

$$
\begin{array}{l}
2y = 2x_1 + x_2 - 8 \\
y = x_1 + 4x_2 - 12 \\
2x_1 + x_2 = 2
\end{array}
$$

を満たす．この連立一次方程式を解くことにより，問題 (6) の最適解 $x_1 = -\frac{1}{7}$，$x_2 = \frac{16}{7}$ と，そのときの $y = -3$ ならびに最適値 $\frac{125}{7}$ が得られる．

演習問題 1.11 任意の正の $\alpha > 0$ に対して

$$
\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}\right)^T \Delta\boldsymbol{x} \geq 0
$$

が成立するならば

$$
(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T \Delta\boldsymbol{x} \geq 0
$$

となることを示せ.

演習問題 1.12 部分空間 $\ker \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の直交補空間が $\mathrm{image}\boldsymbol{A}^T = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\}$ となることを示せ.

1.4 凸2次計画問題の最適条件

線形計画問題の目的関数あるいは制約条件式に現れる線形関数を非線形関数に一般化したものを**非線形計画問題** (nonlinear programming problem) という．2次計画問題は，線形計画問題を除くと，最も単純な非線形計画問題であり，目的関数が2次関数で，制約式が線形の等式と不等式で表される次の問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\
 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2
\end{array} \tag{7}
$$

である．ここで, m_1, m_2, n を自然数とするとき, $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{R}^{m_1\times n}$, $\boldsymbol{A}_2 \in \mathcal{R}^{m_2\times n}$ が定数行列，$\boldsymbol{b}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$，$\boldsymbol{b}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$，$\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ が定数ベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ が変数ベクトルである．正方行列 $\boldsymbol{Q}$ が対称かつ半正定値であるとする．また，変数の一部に非負制約が

ある場合には，不等式 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2$ の一部によって表されていると考えることにより，任意の 2 次計画問題がこの形 (7) に表現できる．

$\boldsymbol{x}^*$ が 2 次計画問題 (7) の最適解であるとする．このとき，2 次の目的関数を点 $\boldsymbol{x}^*$ で一次近似した次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2 \end{array}$$

あるいは，そこから目的関数の定数項を除いた問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2 \end{array} \tag{8}$$

を考える．

定理 1.13 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸 2 次計画問題 (7) の最適解であるならば，$\boldsymbol{x}^*$ は線形計画問題 (8) の最適解である．

証明 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ を凸 2 次計画問題 (7) の最適解とする．$\boldsymbol{x}^*$ が線形計画問題 (8) の最適解でないと仮定して，矛盾を導くことにより定理を証明する．

$\boldsymbol{x}^*$ が線形計画問題 (8) の最適解でないので，ある実行可能解 $\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}$ が存在し，

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}) < (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}^* \tag{9}$$

となる．このとき，任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して，$\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$ は，線形計画問題 (8) の実行可能解であり，凸 2 次計画問題 (7) の実行可能解でもある．ここで，2 点 $\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}^*$ での 2 次計画問題の目的関数値の差が

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\right) \\ &= \alpha\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}\right)^T\Delta\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる．不等式 (9) より，$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T\Delta\boldsymbol{x} < 0$ であるので，十分小さな $\alpha > 0$ に対して，上の等式の右辺が負となる．したがって，$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸 2 次計画問題 (7) の最適解であることに矛盾する．▮

定理 1.14 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸 2 次計画問題 (7) の最適解となる必要十分条件は，ある $\boldsymbol{y}_1 \in$

$\mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}_2^T(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}_2) = 0 \\ \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{10}$$

が成立することである．

証明 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸2次計画問題 (7) の最適解であるとする．定理 1.13 より，$\boldsymbol{x}^*$ は線形計画問題 (8) の最適解である．問題 (8) の双対問題は,

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{11}$$

となる．したがって，線形計画問題の双対定理より，双対問題の最適解 $\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，(10) が成立する．

逆に，$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，(10) が成立するとする．このとき，$\boldsymbol{x}^*$ は，凸2次計画問題 (7) の実行可能解であり，任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}'$ に対して,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}' - \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\right) \\ &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' - (\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*) \\ &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' - (\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*) + (\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*)^T(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*) \\ &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' - 2(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{y}_1^T\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{y}_2^T\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{y}_1^T(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_1) + \boldsymbol{y}_2^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}_2^T\boldsymbol{b}_2 \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{y}_2^T(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が成立するので，$\boldsymbol{x}^*$ は，凸2次計画問題 (7) の最適解である．ここで，最後の不等式は，$\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列，$\boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}_2 \geq \boldsymbol{0}$ であることから，導かれる． ▌

系 1.15 n 個の変数と m 個の等式制約を持つ標準形の凸2次計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

と表される．$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ がこの凸2次計画問題の最適解となる必要十分条件は，ある $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}^n$ が存在し，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = 0 \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{12}$$

が成立することである．

この系は定理 1.14 よりすぐに導くことができるので，その証明を演習問題とする．

例 1.16 次の2次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 4x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{13}$$

は,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-3, -4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

と変形できる．したがって，(x_1^*, x_2^*) が最適解ならば，系 1.15 より，ある y^*，z_1^*，z_2^* に対して

$$\begin{array}{l} x_1^* + 2x_2^* = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y^* + \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ x_1^*z_1^* + x_2^*z_2^* = 0 \\ x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0 \\ z_1^* \geq 0, z_2^* \geq 0 \end{array}$$

となる．相補性条件 $x_1^*z_1^* + x_2^*z_2^* = 0$ あるいは $x_1^*z_1^* = 0$，$x_2^*z_2^* = 0$ から，次の4つの場合に分けて考えることができる．

$x_1^* = 0$，$x_2^* = 0$ のとき: $x_1^* + 2x_2^* = 1$ を満たさないので，解なし．

$x_1^* = 0$，$z_2^* = 0$ のとき: 等式条件より，$x_2^* = \frac{1}{2}$，$y^* = -\frac{3}{2}$，$z_1^* = -1$ となるが，これは不等式を満たさない．

$z_1^* = 0$，$x_2^* = 0$ のとき: 等式条件より，$x_1^* = 1$，$y^* = 1$，$z_2^* = -5$ となるが，これは不等式を満たさない.

$z_1^* = 0$，$z_2^* = 0$ のとき: 等式条件より，$x_1^* = \frac{2}{7}$，$x_2^* = \frac{5}{14}$，$y^* = -\frac{3}{2}$ となり，これはすべての条件を満たす.

したがって，主問題 (13) の最適解は，$x_1^* = \frac{2}{7}$，$x_2^* = \frac{5}{14}$ であり，そのとき $y^* = -\frac{3}{2}$，$z_1^* = 0$，$z_2^* = 0$ である.

演習問題 1.17 系 1.15 を証明せよ.

1.5 凸 2 次計画問題の双対問題と双対定理

凸 2 次計画問題 (7) を再掲すると

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\
 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2
\end{array}
$$

である．次の問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{14}
$$

を上の凸 2 次計画問題の双対問題という．このとき，元の問題を主問題という．最小化問題とするために (14) の目的関数に -1 を乗ずると凸関数となるので，(14) は，凸 2 次計画問題である．これより，標準形の凸 2 次計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{15}
$$

の双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{16}
$$

となる (演習問題).

例 1.18 例 1.16 で扱った 2 次計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 4x_2 \\
\text{制約条件} & x_1 + 2x_2 = 1 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

の双対問題は,

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y - \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ & z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{array}$$

あるいは

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y - (2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ \text{制約条件} & y + z_1 = 4x_1 + x_2 - 3 \\ & 2y + z_2 = x_1 + 2x_2 - 4 \\ & z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{array}$$

となる．例 1.16 の結果より，主問題の最適解は $x_1^* = \frac{2}{7}$，$x_2^* = \frac{5}{14}$ であり，双対問題の最適解は $y^* = -\frac{3}{2}$，$z_1^* = 0$，$z_2^* = 0$ となる．このとき，それぞれの最適値が一致し，$-\frac{53}{28}$ となる．

定理 1.19 (弱双対定理) 凸 2 次計画問題 (7)の任意の実行可能解$\boldsymbol{x}$とその双対問題 (14) の任意の実行可能解 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ に対して

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'$$

が成立する．

証明 簡単な計算により

$$\begin{aligned} &\text{左辺} - \text{右辺} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \left(\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'\right) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2)^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{y}_2^T(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_2) \geq 0 \end{aligned}$$

となり，定理の結果が得られる．ここで，最後の不等式では，$\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列であることを使っている． ▌

LP の場合と同様に，弱双対定理からいくつかの性質が得られる．たとえば，凸 2 次計画問題 (7) の実行可能解と双対問題の実行可能解で目的関数値が等しければ，それぞれの問題の最適解である．

定理 1.20 (双対定理) $\boldsymbol{x}^*$ が凸 2 次計画問題 (7) の最適解ならば，ある $\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ が双対問題 (14) の最適解となり，さらに双対問題 (14) の最適値と問題 (7) の最適値が等しい．

証明 $\boldsymbol{x}^*$ が凸 2 次計画問題 (7) の最適解であるとする．定理 1.14 より，ある $\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，(10) をみたす．このとき，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ は双対問題 (14) の実行可能解である．弱双対定理の証明と同様な計算により，問題 (7) と双対問題 (14) の目的関数値の差が，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* - \left(\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*\right) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{y}_2^T(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる．したがって，それぞれの目的関数値が等しく，弱双対定理より，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ は双対問題 (14) の最適解となる． ▮

演習問題 1.21 標準形の凸 2 次計画問題 (15) の双対問題が (16) となることを示せ．

1.6 凸 2 次計画問題を解く主双対内点法

凸 2 次計画問題は，内点法で効率よく解くことができる．線形計画問題の場合と同様に，主問題を解く主内点法と主問題と双対問題を同時に解く主双対内点法がある．また，アルゴリズムとしても，線形計画問題の場合と同様に，パス追跡法，ポテンシャル減少法，アフィンスケーリング法などがある．ここでは，Monteiro and Adler [1] によって提案されたパス追跡法を初期の実行可能内点が既知であるという仮定のもとで解説する．そのような初期点が得られない場合には，線形計画問題のときと同様に，インフィージブル内点法を使うことができる．

標準形の凸 2 次計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{17}
$$

とその双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\
& \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{18}
$$

を解く内点法を解説する．これらの問題に対する最適条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{19}$$

を満たす点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を求める問題を主双対 2 次計画問題と呼ぶ．線形計画問題のときと同様に，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ を満たす点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を問題 (19) の内点と呼び，さらに等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ を満たす点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を問題 (19) の実行可能内点と呼ぶ．ここで，次の仮定を置く．

仮定 1.22 問題 (19) の実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ が既知である．

このとき，正の定数 $\mu > 0$ に対して，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \mu\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{20}$$

を満たす点が唯一つ存在し，それを問題 (19) の解析的中心といい，$(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ とあらわす．解析的中心の集合

$$P = \{(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu)) | \mu > 0\}$$

は，なめらかなパスとなり，中心パスと呼ばれる．

主双対内点法では，初期の実行可能内点から実行可能内点の列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成する．したがって，k 反復目の実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が得られているという仮定のもと，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ の求め方を説明する．点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ とし，定数 $\gamma \in (0, 1)$ に対して，

$$\mu = \gamma\mu_k$$

とする．この μ に対する解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ を求めるために，現在の点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で方程式系 (20) にニュートン法を適用し，探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を求める．それは，線形方程式系

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} = -(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k - \mu\boldsymbol{e}) \end{array} \tag{21}$$

の解である．この方程式系の解は，順に

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}_k+\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}_k+\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e})\\ \Delta\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{Z}_k+\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k+\mu\boldsymbol{e})\\ \Delta\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}\end{aligned} \tag{22}$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列で，$\boldsymbol{X}_k$ と $\boldsymbol{Z}_k$ が対角な正定値行列であるので，行列 $\boldsymbol{Z}_k+\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Q}$ は逆行列を持つ (演習問題)．また，行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるならば，行列 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}_k+\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T$ も逆行列を持つ．このようにして求めた探索方向にステップサイズ α を使って進み，次の点を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{k+1} &= \boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}^{k+1} &= \boldsymbol{y}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}^{k+1} &= \boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z}\end{aligned} \tag{23}$$

とする．ここでステップサイズの決め方には，線形計画問題の場合と同様に様々な方法がある．理論的な収束性を保証する場合には，中心パスの近傍 N を使い，その近傍内にとどまるようにステップサイズを定める方法がある．また，実際に効率よいと言われている方法では，次の点が実行可能であるための最大のステップサイズ

$$\hat{\alpha} = \max\{\alpha | \boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

と定数 $\lambda \in (0,1)$ を使い，$\alpha = \lambda\hat{\alpha}$ としている．以上をまとめると，主双対パス追跡法は，次のようになる．

アルゴリズム 1.23 凸 2 次計画問題に対する主双対パス追跡法は，次のステップから成る．

ステップ 0　初期実行可能内点を $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)$，$\gamma \in (0,1)$，$k=0$ とする．

ステップ 1　点 $(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)$ において，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$，$\mu = \gamma\mu_k$ とし，式 (22) により探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{z})$ を計算する．

ステップ 2　中心パスの近傍を使うなどして，ステップサイズ α を定め，式 (23) により，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})$ を求める．反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

演習問題 1.24 $\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列で，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Z}$ が対角な正定値行列であるならば，行列 $\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}$ が逆行列を持つことを示せ．

1.7 演習問題の略解

1.7.1 演習問題 1.6 の略解

任意の n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)$$

とすれば，

$$\boldsymbol{Q}^T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{Q}$$

が成り立ち，さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．したがって，この $\boldsymbol{Q}$ が題意を満たす．

1.7.2 演習問題 1.7 の略解

半正定値対称行列 $\boldsymbol{Q}$ に対して，2次関数を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

とする．任意の $\theta \in [0, 1]$，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{R}^n$，$\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
&\theta f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\theta)f(\boldsymbol{x}_2) - f(\theta\boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2) \\
&= \theta(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_1) + (1-\theta)(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_2) \\
&\quad - \Big(\frac{1}{2}(\theta\boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{Q}(\theta\boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{c}^T(\theta\boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\theta(1-\theta)(\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_2) \\
&= \frac{1}{2}\theta(1-\theta)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

となるので，f は，凸関数である．

逆に，上の 2 次関数 f が凸関数であるとする．このとき，任意の $\theta \in [0, 1]$，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{R}^n$，$\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{R}^n$ に対して，上の不等式が成立するので，

$$\frac{1}{2}\theta(1-\theta)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \geq 0$$

である．ここで，$\theta = 1/2$，$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ を代入すると，任意の $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_1 \geq 0$$

となるので，行列 $\boldsymbol{Q}$ は半正定値である．

1.7.3 演習問題 1.8 の略解

(1) 関数を

$$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2=\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

とする．この関数 f の 2 次の係数行列を $\boldsymbol{Q}$ とするとき，任意の (x_1,x_2) に対して

$$(x_1,x_2)\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2=2(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{2}x_2^2\geq 0$$

となるので，$\boldsymbol{Q}$ は半正定値行列である．したがって，関数 f は，凸関数である．

(2) 次に，関数を

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_1x_2+2x_2^2=\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

とする．この関数 f の 2 次の係数行列を $\boldsymbol{Q}$ とするとき，任意の (x_1,x_2) に対して

$$(x_1,x_2)\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2x_1^2+6x_1x_2+4x_2^2=2(x_1+\frac{3}{2}x_2)^2-\frac{1}{2}x_2^2$$

となる．$(x_1,x_2)=(-3/2,1)$ に対して，上の値が負となるので，$\boldsymbol{Q}$ は半正定値行列ではない．したがって，関数 f は，凸関数ではない．

1.7.4 演習問題 1.11 の略解

任意の $\alpha>0$ に対して

$$\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}\right)^T\Delta\boldsymbol{x}\geq 0 \qquad (24)$$

が成立するとしよう．ここで

$$\beta=-(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\Delta\boldsymbol{x}>0$$

と仮定する．もし，$\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}=0$ ならば，明らかに式 (24) に矛盾する．さもなければ，$\gamma=\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}>0$ であるが，このときも，$\alpha=\beta/\gamma>0$ に対して

$$\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c}\right)^T\Delta\boldsymbol{x}=\frac{\beta}{2}-\beta=-\frac{\beta}{2}<0$$

となり，式 (24) に矛盾する．したがって，$\beta\leq 0$，すなわち $(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{c})^T\Delta\boldsymbol{x}\geq 0$ である．

1.7.5 演習問題 1.12 の略解

$\boldsymbol{x}\in\ker\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ かつ $\boldsymbol{x}'\in\mathrm{image}\boldsymbol{A}^T=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\}$ ならば，ある $\boldsymbol{y}$ が存在し

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$$

となるので，image$\boldsymbol{A}^T$ は，$\ker \boldsymbol{A}$ の直交補空間に含まれる．いま，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の次元を k とすれば，部分空間 $\ker \boldsymbol{A}$ の次元は $n-k$ であり，部分空間 image$\boldsymbol{A}^T$ の次元は k である．したがって，

$$\dim(\ker \boldsymbol{A}) + \dim(\mathrm{image}\boldsymbol{A}^T) = n$$

となるので，image$\boldsymbol{A}^T$ は，$\ker \boldsymbol{A}$ の直交補空間である．

1.7.6 演習問題 1.17 の略解

標準形の凸 2 次計画問題 (15) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となっている．これは，2 次計画問題 (7) において $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{E}$(単位行列)，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ となっている場合とみなすことができる．したがって，式 (10) より，$\boldsymbol{x}$ が最適解となる必要十分条件は，ある $\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^m$ が存在し，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}_2^T(\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

が成立することである．これは，$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{z}$ とすれば，$\boldsymbol{E}$ が単位行列であることから，系 1.15 の条件式 (12) と一致する．

1.7.7 演習問題 1.21 の略解

標準形の凸 2 次計画問題 (15) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

である．これは，2 次計画問題 (7) において $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{E}$(単位行列)，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ となっている場合とみなすことができる．したがって，その双対問題は，(14) より

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{0}^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{z}$ とすれば，$\boldsymbol{E}$ が単位行列であることから，この問題は，(16) と一致する．

1.7.8 演習問題 1.24 の略解

$\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列で，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Z}$ が対角な正定値行列であると仮定する．もし，行列 $\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}$ が，逆行列を持たないならば，正則ではないので，ある $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ に対して

$$(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$$

となる．これより，

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y}$$

となり，さらに

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{Q}$ が半正定値行列であることから左辺の値はゼロ以上であり，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Z}$ が対角な正定値行列であることから右辺が負となリ，矛盾が導かれる．したがって，行列 $\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}$ は逆行列を持つ．

参考文献

[1] R. D. C. Monteiro and I. Adler, Interior path following primal-dual algorithms: Part II: Convex quadratic programming, *Mathematical Programming*, 44, 43–66, 1989.