学習・研究用テキスト 線形計画法 (2A)

強相補解

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2013 年 2 月 23 日

概要

線形計画問題の主問題と双対問題の最適解では，ペアとなる変数 (あるいは不等式) のどちらか一方が 0(あるいは等号成立) となる相補性条件が成り立ち，そのような解を相補解という．このとき，ペアとなる各変数の一方が 0 であるが，他方が必ず正になることを強相補性条件といい，それを満たす解を強相補解という．この強相補解の存在が，内点法の収束性などを議論するときに，とても重要である．任意の線形計画問題において，最適解が存在するならば，主問題の最適解と双対問題の最適解に強相補性条件を満たすものが存在することを示す．証明には，双対定理の証明でも使用した分離定理を利用する．

目次

1 強相補解

1.1 強相補解の存在性

標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{1}
$$

を主問題とし，その双対問題を

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

とする．ここで，次の仮定を置く．

仮定 1.1 主問題 (1) には，最適解が存在する．（したがって，双対定理により，双対問題 (2) にも最適解が存在する．）

このとき，主問題 (あるいは双対問題) の最適値を ω^*，主問題の最適解の集合を

$$U_P=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=\omega^*,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\}$$

双対問題の最適解の集合を

$$U_D=\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\mid \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}=\omega^*,\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}\}$$

とする．また，主問題の最適解で正となりうる変数 x_i の添え字の集合

$$I_P=\{i\mid \exists\boldsymbol{x}\in U_P,\ x_i>0\}$$

と双対問題の最適解で正となりうる変数 z_i の添え字の集合

$$I_D=\{i\mid \exists(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in U_D,\ z_i>0\}$$

を定義する．

注意 1.2 この添え字集合 I_P と I_D は，最適解集合に対して定義されており，最適基底解における基底変数の添え字集合 I_B と非基底変数の添え字集合 I_N と似て非なるものである．退化していない最適基底解では，$I_P=I_B$ かつ $I_D=I_N$ となるが，一般には異なるものである．

集合 I_P と I_D は，$\mathcal{N}_n=\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合であり，相補性条件より

$$I_P\cap I_D=\emptyset$$

を満たす．したがって，$\mathcal{N}_n$ に含まれるが，I_P にも I_D にも含まれない添え字の集合を J とすれば，３つの集合 I_P, I_D, J は集合 $\mathcal{N}_n$ の分割となる．このとき，次の結果が得られる．

補題 1.3 線形計画問題 (1) が最適解をもつならば，主問題 (1) の最適解 $\boldsymbol{x}^* \in U_P$ と双対問題 (2) の最適解 $(\boldsymbol{y}^*,\ \boldsymbol{z}^*) \in U_D$ が存在して

$$\forall i \in I_P,\ x_i^* > 0,\ z_i^* = 0 \tag{3}$$

かつ

$$\forall i \in I_D,\ x_i^* = 0,\ z_i^* > 0 \tag{4}$$

となる．また，$i \in J$ が存在すれば，$x_i^* = 0,\ z_i^* = 0$ である．

証明 集合 I_P の定義より，各 $i \in I_P$ ごとに，ある最適解 $\boldsymbol{x}$ が存在して，その i 番目の要素が正となる．最適解の集合は凸集合であるから，そのような最適解の正の係数による凸結合となる最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とすれば，すべての $i \in I_P$ に対して同時に $x_i^* > 0$ となる．双対問題についても同様である．最後の結果は，J の定義より明らかに成り立つ． ▮

集合 J が空となるとき，上の補題の条件 (3) と (4) を**強相補性条件**といい，それを満たす解 $\boldsymbol{x}^*$ と $(\boldsymbol{y}^*,\ \boldsymbol{z}^*)$ を**強相補解**という．次の定理で，線形計画問題には強相補解が存在することを示す．

定理 1.4（強相補解の存在） 線形計画問題 (1) が最適解をもつならば，(1) の最適解 $\boldsymbol{x}^* \in U_P$ と双対問題 (2) の最適解 $(\boldsymbol{y}^*,\ \boldsymbol{z}^*) \in U_D$ が存在して

$$\forall i \in \mathcal{N}_n,\ (x_i^* > 0,\ z_i^* = 0) \text{ or } (x_i^* = 0,\ z_i^* > 0)$$

となる．言い換えれば，$J = \emptyset$ である．

演習問題 1.5 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

とその双対問題に対して，集合 I_P, I_D, J を求めよ．また，補題 1.3 の条件を満たす最適解を一つ求めよ．

1.2 Farkas の補題

前節の強相補解の存在定理を証明する準備として，Farkas の補題とその系を示す．

定理 1.6（Farkas の補題） m 次ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と $\boldsymbol{b}$ に対して，2 つの命題を

I　$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq 0\ (i=1,2,\cdots,n),\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^m$ が存在する

II　$\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b},\ x_i \geq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ を満たす $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in \mathcal{R}^n$ が存在する

とすれば，どちらか一方は真であるが，他方は偽である．

補足説明 1.7　証明の前に，$m=2$ かつ $n=2$ の場合に図 1 を用いて，この補題を解説する．ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の非負線形結合からなる凸錐 C は，図の斜線部分のようになる．命題 II は，ベクトル $\boldsymbol{b}$ がこの凸錐 C 上の点であれば真であり，なければ偽である．一方，$\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{y} \geq 0,\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{y} \geq 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ の集合は，ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ となす角度が 90 度以下の集合であるから，図の D のようにあらわされる．したがって，$\boldsymbol{b}$ が C 上にあれば，任意の $\boldsymbol{y} \in D$ と $\boldsymbol{b}$ との角度が 90 度以下であり，命題 I が偽となるが，$\boldsymbol{b}$ が C 上になければ，図のように $\boldsymbol{b}$ との角度が 90 度よりおおきい D 上のベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在し，命題 I が真となる．

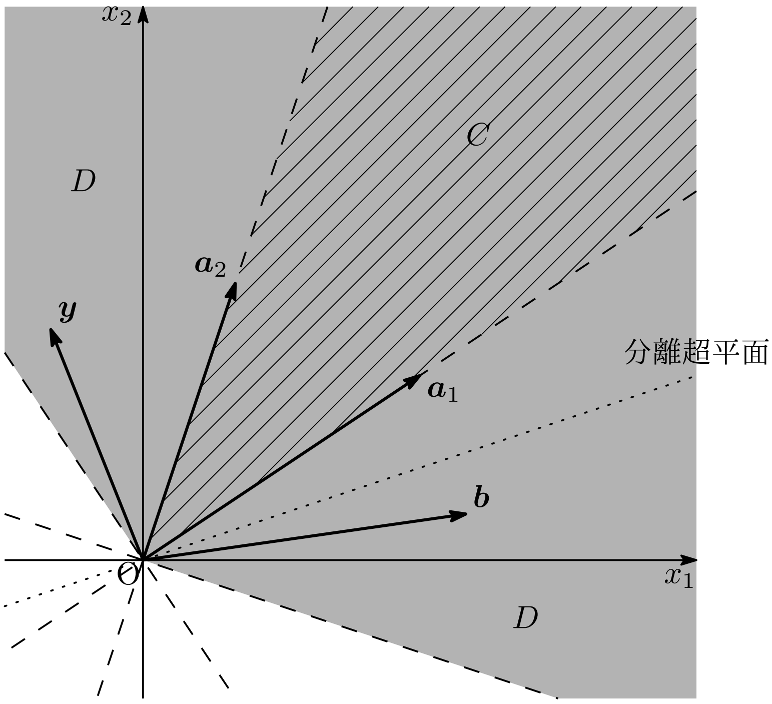

図 1　$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の非負線形結合からなる閉凸錐 C 上に $\boldsymbol{b}$ がない場合

証明 ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の非負線形結合からなる閉凸錐を

$$C=\{\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{z}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{a}_i,\ x_i\geq 0\ (i=1,2,\cdots,n)\}$$

とする．$\boldsymbol{b}\in C$ ならば命題 II が真である．他方，$\boldsymbol{b}\notin C$ ならば，分離定理より，ある $\boldsymbol{d}\in\mathcal{R}^m$ が存在し，

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{b}<\inf_{\boldsymbol{z}\in C}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{z}$$

となる．$\boldsymbol{0}\in C$ であり，C が閉凸錐であるので，$\inf_{\boldsymbol{z}\in C}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{z}=0$ となる．したがって，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{d}$ とすれば，上の不等式より $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}<0$ である．$\boldsymbol{a}_i\in C$ であるから，

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{a}_i\geq\inf_{\boldsymbol{z}\in C}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{z}=0$$

となる．したがって，命題 I が真となる．ゆえに，命題 I と II のどちらか一方は真である．

また，命題 I を満たす $\boldsymbol{y}$ と命題 II を満たす $\boldsymbol{x}$ が共に存在する仮定すると，

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{a}_i\right)^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}<0$$

となる．これは $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y}\geq 0, x_i\geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ と矛盾する．したがって，命題 I と II のどちらか一方は偽である． ▮

補足説明 1.8 上の定理の証明で使用した分離定理は，テキスト [1] において，双対定理の証明にも使用されており，そこに証明も記載されている．

Farkas の補題の中の命題 I の否定は，

III $\quad \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y}\geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ならば $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}\geq 0$

と表すことができる．したがって，Farkas の補題は，上の III の必要十分条件が II であるというように述べられることもある．命題 II から III は自明であるが，逆に命題 III が成り立つとき，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の非負線形結合からなる閉凸錐に含まれることを示している．

Farkas の補題のように，二つの命題のどちらか一方が真であるが，同時に真とはならないというような定理を**二者択一の定理**という．次の系も，Farkas の補題からすぐに得られる二者択一の定理である．

系 1.9 m 次ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n+k)$ と $\boldsymbol{b}$ に対して，2 つの命題を

I　$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} = 0\ (i = n+1, n+2, \cdots, n+k)$, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^m$ が存在する

II　$\sum_{i=1}^{n+k} x_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$, $x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+k})^T \in \mathcal{R}^{n+k}$ が存在する

とすれば，どちらか一方は真であるが，他方は偽である．

証明 この命題 I は，

I'　$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq 0\ (i = n+1, n+2, \cdots, n+k)$, $-\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq 0\ (i = n+1, n+2, \cdots, n+k)$, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^m$ が存在する

と同値である．したがって，Farkas の補題より

II'　$\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i\boldsymbol{a}_i - \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i'\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$, $x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n+k)$, $x_i' \geq 0\ (i = n+1, \cdots, n+k)$ を満たす $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+k})^T$, $\boldsymbol{x}' = (x_{n+1}', x_{n+2}', \cdots, x_{n+k}')^T$ が存在する

とすれば，命題 I' と II' のうちどちらか一方は真であるが，他方は偽である．ここで，$x_i - x_i'\ (i = n+1, \cdots, n+k)$ を II の中の x_i とみることにより，系の命題 II と上記 II' は同値である．したがって，系が成立する．∎

1.3 強相補解の存在性の証明

この節では，定理 1.4 を証明，すなわち，線形計画問題が最適解をもつならば、$J = \emptyset$ であることを証明する．

証明 補題 1.3 の条件を満たす主問題 (1) の最適解を $\boldsymbol{x}^* \in U_P$ とし，双対問題 (2) の最適解を $(\boldsymbol{y}^*,\ \boldsymbol{z}^*) \in U_D$ とする．ある $j \in J$ が存在すると仮定し，矛盾を導く．行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i 列 (x_i の係数ベクトル) を $\boldsymbol{a}_i\ (i \in \mathcal{N}_n)$ とする．このとき，集合

$$W = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\ (i \in I_P),\ -\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y} \geq 0\ (i \in J,\ i \neq j),\ \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{y} < 0\}$$

を定義する．

まずはじめに，W が空集合でないと仮定する．このとき，ある $\boldsymbol{y} \in W$ が存在する．十分小さな $\epsilon > 0$ に対して，$\bar{\boldsymbol{y}}^* = \boldsymbol{y}^* + \epsilon\boldsymbol{y}$, $\bar{z}_i^* = z_i^* - \epsilon\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{y}\ (i \in \mathcal{N}_n)$, $\bar{\boldsymbol{z}}^* = (\bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*, \cdots, \bar{z}_n^*)^T$ とすれば，$(\bar{\boldsymbol{y}}^*, \bar{\boldsymbol{z}}^*)$ が双対問題の最適解となる (演習問題)．しかし，$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{y} < 0$ より，$\bar{z}_j^*$ が正であるから，$j \in I_D$ となり，$j \in J$ と矛盾する．

次に，W が空集合であると仮定する．Farkas の補題の系 1.9 により，

$$\sum_{i\in I_P} x_i \boldsymbol{a}_i - \sum_{i\in J,\ i\neq j} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j,\ x_i \geq 0\ (i\in J,\ i\neq j) \tag{6}$$

を満たす x_i $(i \in I_P \cup J,\ i \neq j)$ が存在する．十分小さな $\epsilon > 0$ に対して，$\bar{x}_i^* = x_i^* - \epsilon x_i$ $(i \in I_P)$，$\bar{x}_i^* = x_i^* + \epsilon x_i$ $(i \in J,\ i \neq j)$，$\bar{x}_j^* = x_j^* + \epsilon$，$\bar{x}_i^* = x_i^*$ $(i \in I_D)$ とすれば，$\bar{\boldsymbol{x}}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \cdots, \bar{x}_n^*)^T$ が主問題の最適解となる (演習問題)．しかし，$\bar{x}_j^*$ が正であるから，$j \in I_P$ となり，$j \in J$ と矛盾する．∎

演習問題 1.10　上の定理の証明のなかで，$(\bar{\boldsymbol{y}}^*, \bar{\boldsymbol{z}}^*)$ が双対問題 (2) の最適解となることを示せ．

演習問題 1.11　上の定理の証明のなかで，$\bar{\boldsymbol{x}}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \cdots, \bar{x}_n^*)^T$ が主問題 (1) の最適解となることを示せ．

1.4　演習問題の略解

1.4.1　演習問題 1.5 の略解

線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \tag{7}$$

の双対問題は，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y_1 + y_2 \\ \text{制約条件} & y_1 + y_2 + z_1 = 1 \\ & y_1 + y_2 + z_2 = 1 \\ & -y_1 + z_3 = 0 \\ & -y_2 + z_4 = 0 \\ & z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, z_4 \geq 0 \end{array} \tag{8}$$

となる．したがって，主問題 (7) の最適解は，任意の $t \in [0,1]$ に対して，

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, 1-t, 0, 0)$$

と表され，双対問題 (8) の最適解は，任意の $s \in [0,1]$ に対して，

$$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4) = (s, 1-s, 0, 0, s, 1-s)$$

と表され，最適値はそれぞれ 1 である．したがって，

$$I_P = \{1,2\},\ I_D = \{3,4\},\ J = \emptyset$$

となる．補題 1.3 の条件を満たす最適解の一つは，$t = 1/2,\ s = 1/3$ として，

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 1/2, 0, 0),\ (y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4) = (1/3, 2/3, 0, 0, 1/3, 2/3)$$

が得られる．

1.4.2 演習問題 1.10 の略解

$\bar{\boldsymbol{y}}^* = \boldsymbol{y}^* + \epsilon \boldsymbol{y}$，$\bar{z}_i^* = z_i^* - \epsilon \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y}\ (i \in \mathcal{N}_n)$，$\bar{\boldsymbol{z}}^* = (\bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*, \cdots, \bar{z}_n^*)^T$ であるから，任意の $i \in \mathcal{N}_n$ に対して

$$\boldsymbol{a}_i^T \bar{\boldsymbol{y}}^* + \bar{z}_i^* = \boldsymbol{a}_i^T (\boldsymbol{y}^* + \epsilon \boldsymbol{y}) + z_i^* - \epsilon \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y}^* + z_i^* = c_i$$

となる．また，$i \in I_P$ のとき $z_i^* = 0,\ \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y} = 0$ より

$$\bar{z}_i^* = z_i^* - \epsilon \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y} = 0$$

となり，$i \in J, i \neq j$ のとき $z_i^* = 0,\ -\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y} \geq 0$ より

$$\bar{z}_i^* = z_i^* - \epsilon \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y} \geq 0$$

となり，$i = j$ のとき $z_j^* = 0,\ \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{y} < 0$ より

$$\bar{z}_j^* = z_j^* - \epsilon \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{y} > 0$$

となり，$i \in I_D$ のとき $z_i^* > 0$ であるから，$\epsilon > 0$ が十分小さければ

$$\bar{z}_i^* = z_i^* - \epsilon \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y} > 0$$

となる．したがって，$(\bar{\boldsymbol{y}}^*, \bar{\boldsymbol{z}}^*)$ は，双対問題 (2) の実行可能解である．さらに，$\bar{z}_i^* = 0\ (i \in I_P)$ より，主問題の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ と相補性条件を満たすので，$(\bar{\boldsymbol{y}}^*, \bar{\boldsymbol{z}}^*)$ は最適解となる．

1.4.3 演習問題 1.11 の略解

$\bar{x}_i^* = x_i^* - \epsilon x_i\ (i \in I_P)$，$\bar{x}_i^* = x_i^* + \epsilon x_i\ (i \in J,\ i \neq j)$，$\bar{x}_j^* = x_j^* + \epsilon$，$\bar{x}_i^* = x_i^*\ (i \in I_D)$ であるから

$$\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^* & = & \sum_{i \in I_P} \bar{x}_i^* \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in J, i \neq j} \bar{x}_i^* \boldsymbol{a}_i + \bar{x}_j^* \boldsymbol{a}_j + \sum_{i \in I_D} \bar{x}_i^* \boldsymbol{a}_i \\
& = & \sum_{i \in I_P} (x_i^* - \epsilon x_i) \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in J, i \neq j} (x_i^* + \epsilon x_i) \boldsymbol{a}_i + (x_j^* + \epsilon) \boldsymbol{a}_j + \sum_{i \in I_D} x_i^* \boldsymbol{a}_i \\
& = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \epsilon (\sum_{i \in I_P} (-x_i) \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in J, i \neq j} x_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) \\
& = & \boldsymbol{b}
\end{array}$$

となる．ここで，最後の等式は，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$ と式 (6) より得られる．また，$i \in I_P$ のとき $x_i^* > 0$ であるから，$\epsilon > 0$ が十分小さければ

$$\bar{x}_i^* = x_i^* - \epsilon x_i > 0$$

となり，$i \in J, i \neq j$ のとき $x_i^* = 0,\ x_i \geq 0$ より

$$\bar{x}_i^* = x_i^* + \epsilon x_i \geq 0$$

となり，$i = j$ のとき $x_i^* = 0$ より

$$\bar{x}_j^* = x_j^* + \epsilon > 0$$

となり，$i \in I_D$ のとき $x_i^* = 0$ より

$$\bar{x}_i^* = x_i^* = 0$$

となる．したがって，$\bar{\boldsymbol{x}}^*$ は，主問題 (1) の実行可能解である．さらに，$\bar{x}_i^* = 0$ $(i \in I_D)$ より，双対問題の最適解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ と相補性条件を満たすので，最適解となる．

謝辞：本テキストで使用している図の作成をしていただいた田中未来君 (東工大大学院生) に感謝します．

参考文献

[1] 水野眞治：学習用テキスト線形計画法 (2) 双対問題と双対定理，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)