学習用テキスト 線形計画法 (2)

双対問題と双対定理

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科　経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2013 年 2 月 9 日

概要

線形計画問題には，それと対をなす双対問題が存在し，元の問題を主問題と呼ぶ．主問題と双対問題を一緒に考慮することにより，線形計画問題のさまざまな性質が明らかになり，より理解を深めることができる．とくに，双対定理は，線形計画問題の実行可能性と最適解の存在について理解する上で重要な結果である．

本テキストの内容を理解する上で必要な数理的知識としては，例えば文献 [2] で十分である．また，数学記号の使い方も，ほぼ同書 [2] に従っている．

目次

1 双対問題

まずはじめに，一般形の線形計画問題の双対問題を説明する．

1.1 双対問題の定義

一般形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

に対して，次の問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2 \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

あるいは，それを変形した

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & -\boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 \geq -\boldsymbol{c}_1 \\ & -\boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 = -\boldsymbol{c}_2 \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

を問題 (1) の**双対問題**という．このとき，元の問題 (1) を**主問題**という．この問題 (3) は，一般形の線形計画問題である．したがって，問題 (1) の双対問題が (3) であるという定義をこの問題 (3) に適用すれば，問題 (3) の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{z}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{z}_2 \geq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{z}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

と表すことができる．この問題は，主問題 (1) と同じである． 以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 1.1 双対問題 (2) の双対問題は，主問題 (1) と同値である．

この定理より，双対問題と主問題の間に成り立つ性質は，双対問題と主問題を入れ替えても成り立つ．

一般形の線形計画問題の双対問題の定義から，その他の線形計画問題の双対問題を簡単に得ることができる．たとえば，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{5}$$

は，一般形の問題 (1) において $\boldsymbol{c}_2$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ がなく，$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{A}$ となっている場合である．その双対問題は，(2) より

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array} \tag{6}$$

となる．ここで，問題 (2) における変数ベクトル $\boldsymbol{y}_2$ の代わりに $\boldsymbol{y}$ を使っている．

演習問題 1.2 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

の双対問題を求めよ．

演習問題 1.3 標準形の線形計画問題 (5) の双対問題が (6) であると定義するとき，一般形の線形計画問題 (1) の双対問題が (2) となることを示せ．

1.2 一般形の線形計画問題の双対問題の例

線形計画問題

$$\begin{array}{lrrrrrcr} \text{最小化} & 2x_1 & -4x_2 & & -x_4 & +3x_5 & & \\ \text{制約条件} & 3x_1 & & +x_3 & & -5x_5 & \geq & 16 \\ & -2x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & & \geq & 21 \\ & 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & & -3x_5 & = & 18 \\ & & -x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = & 9 \\ & \multicolumn{2}{r}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0} & & & & & \end{array}$$

を主問題とする．これは一般形の線形計画問題 (1) であり，その双対問題は，(2) より

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{最大化} & 16y_1 & +21y_2 & +18y_3 & +9y_4 & & \\ \text{制約条件} & 3y_1 & -2y_2 & +4y_3 & & \leq & 2 \\ & & 2y_2 & -2y_3 & -y_4 & \leq & -4 \\ & y_1 & & +y_3 & & = & 0 \\ & & 3y_2 & & +3y_4 & = & -1 \\ & -5y_1 & & -3y_3 & +2y_4 & = & 3 \\ & \multicolumn{2}{r}{y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0} & & & & \end{array}$$

となる．

2 双対定理

この節では，線形計画問題の主問題と双対問題の間に成り立つ性質等について調べる．一般形の線形計画問題を使うと煩雑になるので，標準形の線形問題 (5) を主問題として，その双対問題 (6) を使う．

2.1 弱双対定理と双対定理

双対問題 (6) は，スラック変数を導入すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7}$$

となる．弱双対定理を示す前に，簡単に導かれるが，重要な関係式を示す．

補題 2.1 $\boldsymbol{x}$ を主問題 (5) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題 (7) の実行可能解とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}$$

が成立する．

証明 $\boldsymbol{x}$ を主問題 (5) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題 (7) の実行可能解とすれば，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}$ となる．したがって，簡単な計算により，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{x}$$

が成立する． ∎

この補題から，次の弱双対定理がすぐに導かれる．

定理 2.2（弱双対定理 (weak duality theorem)） $\boldsymbol{x}$ を主問題 (5) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題 (7) の実行可能解とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

が成立する．すなわち，主問題 (5) の目的関数値は，双対問題 (7) の目的関数値より常に大きいか等しい．

証明 $\boldsymbol{x}$ を主問題 (5) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題 (7) の実行可能解とすれば，補題 2.1 と $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \geq 0$ が成立する． ∎

この定理より，主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ の目的関数値の差 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ は，常にゼロ以上である．この差を**双対ギャップ**という．弱双対定理は，主問題と双対問題がともに実行可能であるときのみ意味があり，少なくとも一方が実行不能な場合には，特に何も言っていない．しかし，線形計画問題には，最適解をもつ，非有界，実行不能の 3 つの場合のみがあることを使えば，弱双対定理より，次のような興味深い結果を導くことができる．

系 2.3 線形計画問題の主問題 (5) と双対問題 (7) について，次のことが成り立つ．

1. 主問題と双対問題がともに実行可能ならば，主問題の実行可能解での目的関数値は，双対問題の最適値の上界となる．($\boldsymbol{x}$ を主問題の実行可能解とすれば，双対問題の任意の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ に対して，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ が成立する．）同様に，双対問題の実行可能解での目的関数値は，主問題の最適値の下界となる．
2. 主問題と双対問題がともに実行可能ならば，それぞれ最適解をもつ．
3. 主問題が実行可能で非有界ならば，双対問題は実行不能である．
4. 主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$ での目的関数値と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ での目的関数値が一致 $(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*)$ すれば，$\boldsymbol{x}^*$ と $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ はそれぞれの問題の最適解である．

証明 1 番目は，弱双対定理より，直ちにいえる．

2 番目は，主問題と双対問題がともに実行可能ならば，1 より主問題に下界が存在し，双対問題に上界するので，導かれる．

3 番目は，主問題が実行可能で非有界であるとき，双対問題が実行可能であるとすると，弱双対定理より主問題に下界が存在するので，矛盾することから導かれる．

4 番目は，次のように示すことができる．主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$ での目的関数値と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ での目的関数値が一致したならば，任意の主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して，弱双対定理より，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$$

が成り立つので，$\boldsymbol{x}^*$ が主問題の最適解である．同様に，$(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が双対問題の最適解である． ▌

この系の最後の結果は，主問題と双対問題の目的関数値が等しければ，それぞれ最適解であることを述べている．しかし，その逆，それぞれが最適解を持つときに最適値が等しいことまでは主張していない．次の双対定理は，このことが成り立つことも示しおり，強力な結果である．

定理 2.4（双対定理 (duality theorem)） 線形計画問題 (5) が最適解をもつならば，双対問題 (6) も最適解をもち，その最適値が等しい．

証明 ここでの証明は，Luenberger [1] を参考にしている．主問題 (5) が最適解を持ち，そのときの最適値が w^* であるとする．ユークリッド空間 $\mathcal{R}^{m+1}$ の部分集合

$$C = \{(r, \boldsymbol{u}) | r = tw^* - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} = t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, t \geq 0, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \tag{8}$$

を定義する．この集合 C は，原点を含み，線形同次式で定義されているので，空でない凸錐である．まず，$(1, \boldsymbol{0}) \in C$ であると仮定する．このとき，ある $t^0 \geq 0$ と $\boldsymbol{x}^0 \geq 0$ に対して，

$$1 = t^0w^* - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{0} = t^0\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0$$

が成立する．もし，$t^0 = 0$ ならば，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0 = -1$ となるので，実行可能解 $\boldsymbol{x}'$ と任意の $\beta > 0$ に対して，$\boldsymbol{x}' + \beta\boldsymbol{x}^0$ が実行可能解となり，そのときの目的関数値が $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}' - \beta$ となり，β を大きくすることにより，目的関数値をいくらでも小さくできる．したがって，最適解が存在することに矛盾するので，$t^0 > 0$ である．このとき，$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0/t^0$ とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^1 = w^* - \frac{1}{t^0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^1 \geq \boldsymbol{0}$$

となる．これより，$\boldsymbol{x}^1$ が実行可能解であるが，その目的関数値が w^* より小さくなっている．したがって，w^* が最適値であることに矛盾するので，$(1, \boldsymbol{0}) \notin C$ である．

C が $(1, \boldsymbol{0})$ を含まない凸集合なので，2.3 節で示す分離定理から，あるベクトル $(\alpha, \boldsymbol{d})$ が存在し，

$$(\alpha, \boldsymbol{d}^T) \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} < \inf \left\{ (\alpha, \boldsymbol{d}^T) \begin{pmatrix} r \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \middle| (r, \boldsymbol{u}) \in C \right\} \tag{9}$$

が成立する．ここで，C が錐なので，右辺の値 $\beta = \inf\{\alpha r + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{u} | (r, \boldsymbol{u}) \in C\}$ が負であるとすると，いくらでも小さくできることになり，矛盾する．さらに，$(0, \boldsymbol{0}) \in C$ であるから，$\beta = 0$ であることがわかる．したがって，(9) 式より $\alpha < 0$ である．不等式 (9) をみたすベクトル $(\alpha, \boldsymbol{d})$ に正の数をかけてもやはり (9) をみたすので，$\alpha = -1$ と仮定することができる．このとき，任意の $(r, \boldsymbol{u}) \in C$ に対して，

$$0 \leq -r + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{u}$$

が成立する．したがって，C の定義 (8) より，任意の $t \geq 0$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ に対して，

$$0 \leq -(tw^* - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}^T(t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{d} - w^*) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{x}$$

となる．任意の $t \geq 0$ と任意の $\boldsymbol{x} \geq 0$ に対して上の不等式が成り立つことから，不等式 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{d} - w^* \geq 0$ と $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$ が得られる．これは，$\boldsymbol{d}$ が双対問題 (6) の実行可能解であり，その目的関数値が w^* 以上であることを意味する．したがって，弱双対定理から，その値 w^* が双対問題の最適値で，$\boldsymbol{d}$ が双対問題の最適解である．▌

補足説明 2.5　ユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$ の部分集合 C は，

$$\forall \boldsymbol{x} \in C, \forall \alpha \geq 0, \alpha \boldsymbol{x} \in C$$

が成り立つときに錐と呼ばれ，

$$\forall \boldsymbol{x} \in C, \forall \boldsymbol{y} \in C, \forall \alpha \in [0,1], \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in C$$

が成り立つときに凸集合と呼ばれる．そして，凸集合かつ錐であるときに凸錐という．また，変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する式は，定数項を含まず $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ とあらわされるとき，線形同次式といわれる．いくつかの線形同次式に関する等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = 0$ あるいは不等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq 0$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ あるいはその部分ベクトルの集合は，凸錐となる．したがって，(8) で定義される集合 C は凸錐である．

双対定理は，次の二つのことを主張している．

1. 主問題が最適解をもつならば，双対問題も最適解をもつ．
2. 上記の時に，主問題の最適値と双対問題の最適値が等しい．

双対定理として，後半の結果はよく知られているが，前半の結果も大変重要である．この前半の結果と弱双対定理から，次の系が得られる．

系 2.6　主問題と双対問題についての次の 4 つの条件はすべて同値である．

1. 主問題は最適解をもつ．
2. 双対問題は最適解をもつ．
3. 主問題と双対問題はともに最適解を持つ．
4. 主問題と双対問題はともに実行可能である．

証明 双対定理からすぐに，はじめの 3 つが同値であることが導かれる．また，3 番目から 4 番目も明らかに導かれる．そして，4 番目が成り立っていいれば，弱双対定理から，3 番目が成り立つ．▌

次の結果は，線形計画問題の最適解であるための必要十分条件を示している．

系 2.7 $\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解ならば，

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$
3. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = 0$

が成立する．逆に，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が上の 3 つの条件をみたすならば，$\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解である．

証明 $\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解ならば，明らかにはじめの 2 つの条件が成り立ち，そのとき，双対定理より

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = 0$$

となる．逆が成り立つことも，弱双対定理より，すぐに導かれる． ∎

上の結果を一般形の線形計画問題 (1) に拡張すると，次のようになる．

系 2.8 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ が一般形の線形計画問題 (1) の最適解，$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ がその双対問題 (2) の最適解ならば，

1. $\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2$，$\boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0}$
3. $(\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{b}_1)^T\boldsymbol{y}_1 = 0$，$(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2)^T\boldsymbol{x}_1 = 0$

が成立する．逆に，ベクトル $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ と $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ が上の 3 つの条件をすべてみたすならば，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ が双対問題の最適解である．

次の系のように，線形計画問題の実行可能解が最適であるための条件をさまざまな形で述べることができる．

系 2.9 $\boldsymbol{x}$ を主問題の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題の実行可能解とすれば，次の 4 つの条件はすべて同値である．

1. それぞれ最適解である．
2. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ である．
3. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ である．
4. すべての $i \in \mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $x_i z_i = 0$ である．

上の 4 番目の条件は，すべての $i \in \mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $x_i = 0$ または $z_i = 0$

と同値である．これを**相補性条件** (complementarity condition) または**相補スラック条件** (complementary slackness condition) という．

証明　それぞれ最適解であるならば，双対定理より $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ となり，弱双対定理から，その逆も成り立つ．補題 2.1 より，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ であるから，2 番目と 3 番目の条件は同値である．また，4 番目の条件が成立すれば，あきらかに 3 番目の条件が成り立つ．逆に，3 番目の条件が成り立つならば，

$$x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n = 0$$

となる．ここで，$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ であるので，上の左辺の各項 x_iz_i は 0 以上である．0 以上の n 個の項 x_iz_i を加えると 0 になるので，それぞれの項 x_iz_i が 0 である，したがって，4 番目の条件が成り立つ．▌

以上のことから，主問題を解く代わりに双対問題を解いたとすれば，主問題について次のようなことがいえる．

1. 双対問題が最適解をもてば，主問題も最適解をもつ．
2. 双対問題が非有界ならば，主問題は実行不能である．
3. 双対問題が実行不能ならば，主問題は実行不能であるか，あるいは非有界である．

また，シンプレックス法で主問題あるいは双対問題を解き，その最適解が得られた場合には，同時に他方の問題の最適解も得ることができる．

演習問題 2.10　線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{10}$$

とその双対問題のそれぞれの最適解であるための必要十分条件を求めよ．また，その条件から，それぞれの問題の最適解を求めよ．

2.2　主問題と双対問題の例

2.2.1　主問題の最適解から双対問題の最適解を求める例

主問題が最適解をもつときに，双対問題が最適解をもつことを，数値例を使って示すと同時に，主問題の最適解を使うと，双対問題の最適解が簡単に計算できることも示す．線

形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + 2x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{11}$$

あるいは標準形に変換した

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + 2x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

を主問題とするとき，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3y_1 + 4y_2 \\ \text{制約条件} & 2y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 + 3y_2 \leq 2 \\ & -y_1 \leq 0 \\ & -y_2 \leq 0 \end{array}$$

となる．スラック変数を導入すると，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3y_1 + 4y_2 \\ \text{制約条件} & 2y_1 + y_2 + z_1 = 1 \\ & y_1 + 3y_2 + z_2 = 2 \\ & -y_1 + z_3 = 0 \\ & -y_2 + z_4 = 0 \\ & z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, z_4 \geq 0 \end{array}$$

となる．図 1 に，上の主問題 (11) の実行可能領域と目的関数の等高線を示してあるが，これより，最適解が $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ であり，最適値が 3 であることがわかる．このとき，双対定理より，双対問題も最適解をもつが，$x_1 > 0, x_2 > 0$ と相補性条件より双対問題の最適解において $z_1 = 0, z_2 = 0$ である．これを代入すると，双対問題の実行可能解 $(y_1, y_2) = (1/5, 3/5)$，$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 1/5, 3/5)$ が簡単に計算でき，それが双対問題の最適解である．実際，この解における双対問題の目的関数値は 3 であり，主問題の最適値と一致する．

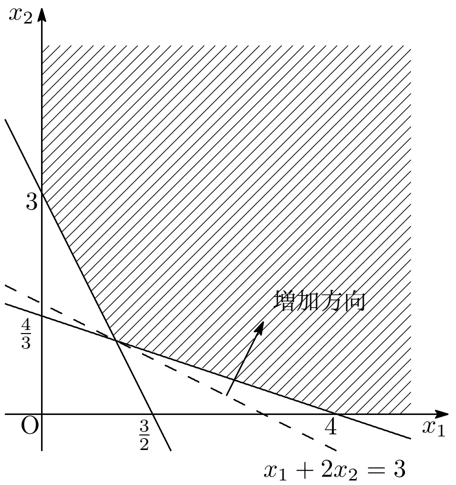

図 1　主問題の実行可能領域と最適解

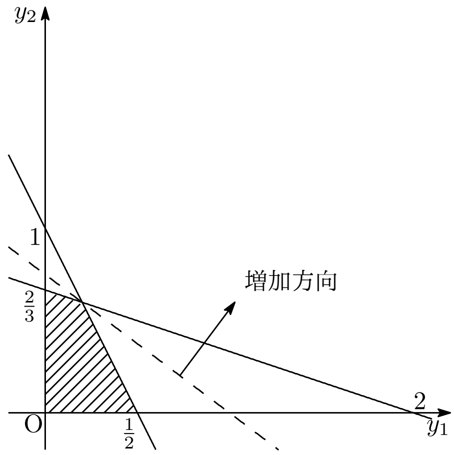

図 2　双対問題の実行可能領域と最適解

2.2.2　双対問題が非有界な例

双対問題が非有界ならば，主問題が実行不能となっていることを，数値例を使って示す．線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & x_1 + 2x_2 \\
\text{制約条件} & 3x_1 + x_2 \le 2 \\
 & -x_1 + 2x_2 \le -1 \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

を主問題とするとき，その双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 2y_1 - y_2 \\
\text{制約条件} & 3y_1 - y_2 \le 1 \\
 & y_1 + 2y_2 \le 2 \\
 & y_1 \le 0 \\
 & y_2 \le 0
\end{array}
$$

となる．この双対問題の実行可能領域を図 3 に示してある．これより，任意の $\alpha \ge 0$ に対して，$y_1 = -\alpha, y_2 = -1 - 3\alpha$ が双対問題の実行可能解であり，そのときの目的関数値が $1 + \alpha$ となるので，双対問題は非有界である．したがって，主問題は，実行不能である．実際，1 番目の不等式の両辺に，2 番目の不等式の両辺を 3 倍して加えると $7x_2 \le -1$ という不等式が得られる．これは $x_2 \ge 0$ と矛盾するので，主問題は実行不能である．

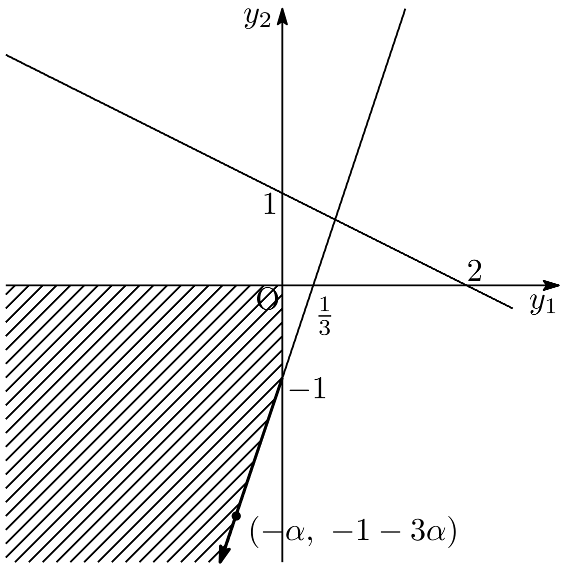

図 3　双対問題の実行可能領域と発散する方向

2.2.3　主問題と双対問題が実行不能な例

線形計画問題の主問題と双対問題が共に実行不能な場合が実際にあることを，数値例を使って示す．線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -2x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 - 3x_2 \geq 1 \\ & -2x_1 + 6x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

を主問題とするとき，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y_1 + 3y_2 \\ \text{制約条件} & y_1 - 2y_2 \leq -2 \\ & -3y_1 + 6y_2 \leq -1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array}$$

となる．主問題は，はじめの不等式の両辺に -2 を乗じると $-2x_1 + 6x_2 \leq -2$ となるが，２番目の不等式と矛盾するので，実行不能である．同様に，双対問題は，はじめの不等式の両辺に -3 を乗じると $-3y_1 + 6y_2 \geq 6$ となるが，２番目の不等式と矛盾するので，実行不能である．

2.3 分離定理

双対定理の証明で使った分離定理を述べ，その証明を示す．

定理 2.11 C を n 次元ユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$ の任意の凸集合とし，その閉包を cl$C$ とする．点 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n$ が cl$C$ に含まれないならば，ある $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^n$ が存在し，$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y} < \inf_{\boldsymbol{x}\in C} \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ となる．

証明 点 $\boldsymbol{y}$ から凸集合 C への距離を

$$\delta = \inf_{\boldsymbol{x}\in C} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

とすれば，$\boldsymbol{y} \notin \mathrm{cl}C$ であるから，$\delta > 0$ である．このとき，図 4 からもわかるように，ある $\boldsymbol{x}^0 \in \mathrm{cl}C$ に対して，$\delta = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}\|$ となる．

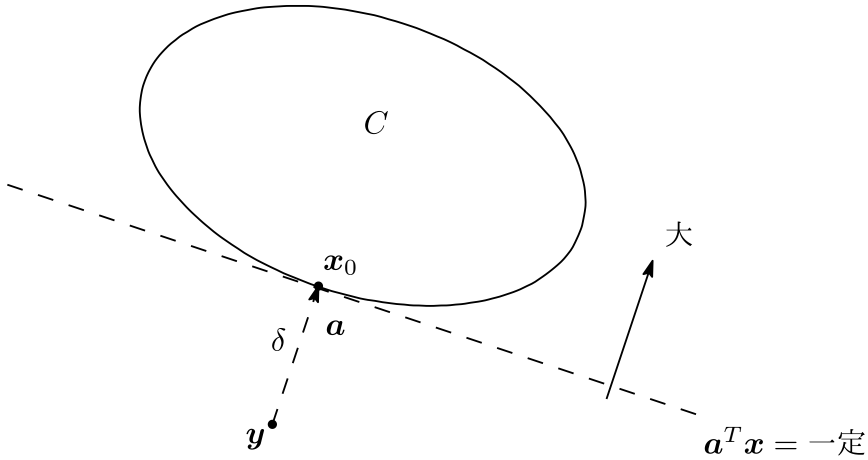

図 4 凸集合 C と $\boldsymbol{y} \notin C$ の分離超平面

次に，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}$ が定理の結果をみたすことを示す．任意の $\boldsymbol{x} \in C$ と $\alpha \in [0,1]$ に対して，$\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^0 \in \mathrm{cl}C$ であるので，

$$\|\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}\|^2 \geq \delta^2 = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}\|^2$$

が成立する．左辺を α の 2 次式として展開すれば，

$$2\alpha(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + \alpha^2\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|^2 \geq 0$$

が得られる．もし $(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) < 0$ であるとしたら，十分小さな正の数 α に対して，上の不等式が成立しないので，

$$\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \geq 0$$

である．したがって，

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}) = \delta^2 + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y}$$

となる．C 上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対して上の不等式が成立するので，定理の結果が得られる．
▮

補足説明 2.12　n 次元ユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$ の部分集合 C の閉包 $\mathrm{cl}C$ とは，C を含むすべての閉集合の共通部分，すなわち C を含む最小の閉集合のことである．$\boldsymbol{y} \notin \mathrm{cl}C$ ならば，$\boldsymbol{y}$ は C の外点であり，$\boldsymbol{y}$ を含む開球で C と交わらないものが存在する．したがって，上の定理の証明における δ が正となる．

2.4　演習問題の略解

2.4.1　演習問題 1.2 の略解

線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

は，一般形の問題 (1) において $\boldsymbol{c}_2$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ がなく，$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{A}$ となっている場合である．その双対問題は，(2) より

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．ここで，問題 (2) における変数ベクトル $\boldsymbol{y}_1$ の代わりに $\boldsymbol{y}$ を使っている．

2.4.2　演習問題 1.3 の略解

一般形の線形計画問題 (1) を標準形に変換すると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{v}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．これは標準形の線形計画問題なので，その双対問題は，問題 (6) より

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_2 \\ & -\boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 \leq -\boldsymbol{c}_2 \\ & -\boldsymbol{y}_1 \leq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．これを変換すると

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T \boldsymbol{y}_2 \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}^T \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{21}^T \boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1 \\
& \boldsymbol{A}_{12}^T \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{22}^T \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2 \\
& \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

となり，問題 (2) と一致する．

2.4.3 演習問題 2.10 の略解

線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

の双対問題は，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 6y \\
\text{制約条件} & y + z_1 = 2 \\
& 2y + z_2 = 3 \\
& 3y + z_3 = 4 \\
& z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0
\end{array}
$$

となる．したがって，系 2.7 から，(x_1, x_2, x_3) が主問題の最適解であり，(y, z_1, z_2, z_3) が双対問題の最適解である必要十分条件は，

$$
\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\
y + z_1 = 2 \\
2y + z_2 = 3 \\
3y + z_3 = 4 \\
x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0
\end{array}
\tag{12}
$$

となる．ここで，系 2.9 から，条件 $x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$ は，相補性条件

$$
x_1 z_1 = 0,\ x_2 z_2 = 0,\ x_3 z_3 = 0
$$

と同値である．$x_1 z_1 = 0$ より，$x_1 = 0$ または $z_1 = 0$ であるので，次のように場合分けをする．

場合 1 ($x_1 = 0$ のとき): 条件 $x_2 z_2 = 0$ より，$x_2 = 0$ または $z_2 = 0$ であるので，さらに場合分けをする．

場合 1-1 ($x_1 = 0$ かつ $x_2 = 0$ のとき): 条件 (12) より，$x_3 = 2$ が得られる．したがって，$x_3 z_3 = 0$ より，$z_3 = 0$ となる．条件 (12) より，順に $y = 4/3$, $z_1 = 2/3$, $z_2 = 1/3$ と計算できる．このとき，条件 (12) がすべて満たされる

場合 1-2 ($x_1 = 0$ かつ $z_2 = 0$ のとき): 条件 (12) より，順に $y = 3/2$, $z_1 = 1/2$, $z_3 = -1/2$ と計算できる．このとき，条件 $z_3 \geq 0$ を満たさないので，条件 (12) をすべて満たす解は存在しない．

場合 2 ($z_1 = 0$ のとき): 条件 (12) より，順に $y = 2$, $z_2 = -1$ と計算できる．このとき，条件 $z_2 \geq 0$ を満たさないので，条件 (12) をすべて満たす解は存在しない．

以上から，条件 (12) をすべて満たす解は，場合 1-1 で得られた $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2)$ と $(y, z_1, z_2, z_3) = (4/3, 2/3, 1/3, 0)$ のみであり，これらの解はそれぞれ主問題と双対問題の最適解となっている．このとき，主問題の目的関数値が 8 であり，双対問題の目的関数値も 8 である．

謝辞：本テキストで使用している図の作成をしていただいた田中未来君 (東工大大学院生) に感謝します．

参考文献

[1] Luenberger, David G. and Ye, Yinyu: *Linear and Nonlinear Programming*, Third Edition, Springer, 2008

[2] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I，II，朝倉書店，2004