学習・研究用テキスト 内点法 (2B)

Karmarkar 法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

Karmarkar[1] は，線形計画問題を多項式オーダの計算量で解くことのできる内点法を 1984 年に提案した．その方法は，Karmarkar 法あるいは射影変換法と呼ばれている．ここでは，Karmarkar 法を解説し，その反復回数が入力データの多項式オーダとなることを示す．

目次

1 Karmarkar 法とは

1984 年に Karmarkar[1] によって提案された新解法は，理論的に多項式オーダの計算量で線形計画問題を解くことができるだけでなく，当時線形計画問題を解く方法の代名詞であった単体法よりも実際に高速に問題を解けるということで，多くの研究者等の注目を集めた．この解法が起爆剤となって，その後，多くの内点法が研究されるようになった．ここでは，Karmarkar 法を説明するとともに，その理論的な収束性についても解説する．

Karmarkar 法が対象とする線形計画問題は，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = n \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{1}
$$

という形をしている．ここで，行列 $\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ であり，$\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$ であり，その

形から他のベクトルの次元も定まっている．1.4 節で，標準形の線形計画問題が，この形の問題に帰着できることを説明する．この問題は，変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ が部分空間

$$T = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

と単体

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = n,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

の交わり $T \cap S$ 上にあるという条件のもとで，線形関数 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ の最小値を求める問題と解釈できる．Karmarkar 法では，次の仮定をおく．

仮定 1.1 線形計画問題 (1) には最適解が存在し，その最適値が 0 である．

仮定 1.2 線形計画問題 (1) の実行可能内点 $\boldsymbol{x}^0$ が既知である．

1.1 内点の更新

Karmarkar 法では，$\boldsymbol{x}^0$ を初期点として，実行可能内点の列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ を生成する．いま，k 番目の実行可能内点 $\boldsymbol{x}^k$ が得られているとして，次の点の求め方を示す．

内点法では，現在の内点 $\boldsymbol{x}^k$ から探索方向とステップサイズを使って，次の内点を計算するが，最適解に近づくと $\boldsymbol{x}^k$ の要素の一部が非常に小さな値となっているので，うまく探索方向を計算しないとステップサイズが極端に小さくなり，効率よく内点を更新することができない．アフィンスケーリング法では，線形変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}$ を使って，現在の点 $\boldsymbol{x}^k$ を $\boldsymbol{e}$ に移すことにより，大きなステップサイズをとることが可能となった．

Karmarkar 法では，次の射影変換

$$u_i = n\frac{x_i/x_i^k}{\sum_{i=1}^n x_i/x_i^k},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

を導入する．これを **Karmarkar の射影変換**と呼ぶ．対角行列 $\boldsymbol{X}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}^k)$ とベクトル $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$ を使うと，上の変換は

$$\boldsymbol{u} = n\frac{\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

とあらわすことができる．この変換により，現在の点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k$ は，$\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{e}$ より

$$\boldsymbol{u} = n\frac{\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}^k}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}^k} = \boldsymbol{e}$$

に写される．各成分が 1 となるので，長さ 1 の方向ベクトル $\Delta\boldsymbol{u}$ なら，ステップサイズ α が 1 以下であれば，次の点

$$\boldsymbol{e} + \alpha\Delta\boldsymbol{u} \tag{3}$$

の各要素が非負となる．この射影変換の逆変換は，次のようになる．

補題 1.3 Karmarkar の射影変換は，定義域を S とすれば，値域も S である．その逆変換は

$$\boldsymbol{x} = \frac{n\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}} \tag{4}$$

であり，この逆変換も定義域を S とすれば，値域が S である．

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in S$ に対して，射影変換の式 (2) より

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} = n\frac{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}} = n$$

となり，明らかに $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ も成り立つので，$\boldsymbol{u} \in S$ である．また，$a = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}$ とすれば，式 (2) より

$$\boldsymbol{x} = \frac{a}{n}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u} \tag{5}$$

となるが，$\boldsymbol{x} \in S$ であるから，

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = \frac{a}{n}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u} = n$$

となる．したがって，

$$a = \frac{n^2}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}}$$

であり，これを式 (5) に代入すると，(4) が得られる．(4) より，任意の $\boldsymbol{u} \in S$ に対して，

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = \frac{n\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}} = n$$

となり，明らかに $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ も成り立つので，$\boldsymbol{x} \in S$ である． ▮

補題の関係式 (4) を問題 (1) の $\boldsymbol{x}$ に代入し，条件 $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} = n$ を加えると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{n\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u}} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} = n \\ & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6}$$

となる．仮定 1.1 より，この問題の最適値が 0 であり，$\boldsymbol{u} \in S$ のとき目的関数の分母は明らかに正であるので，目的関数を分子にある $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{u}$ に置き換えることができる．また，

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{c},\ \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k \tag{7}$$

とすれば，上の問題 (6) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{u} \\ \text{制約条件} & \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n \\ & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{8}$$

となる．また，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k$ を射影変換した $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}$ が，この問題の実行可能解であるから，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

である．次の補題では，$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n$ の超平面上では，単体 S が $\boldsymbol{e}$ を中心とする半径 1 の球体を含み，半径 n の球体に含まれることを示す．

補題 1.4 n 次元ユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$ において，

$$\{\boldsymbol{u} | \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n, \|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{u}\| \leq 1\} \subset \{\boldsymbol{u} | \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}\} \subset \{\boldsymbol{u} | \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n, \|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{u}\| \leq n\}$$

である．

証明 $\|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{u}\| \leq 1$ ならば，$|1 - u_i| \leq 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ であるから，$u_i \geq 0$ となり，前者の包含関係が成り立つ．次に，$\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n$ ならば

$$\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)^2 = n^2$$

であり，

$$\|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{e} - 2\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} \leq n^2 - n < n^2$$

であるので，後者の包含関係が成り立つ． ▌

この補題の結果から，問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{u} \\ \text{制約条件} & \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n \\ & \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}\| \leq n \end{array} \tag{10}$$

は，問題 (8) の緩和問題である．そして，問題 (8) は，問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{u} \\ \text{制約条件} & \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{u} = n \\ & \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}\| \leq 1 \end{array} \tag{11}$$

の緩和問題である．したがって，問題 (8) の最適値が 0 であることから

$$\text{問題 (10) の最適値} \leq 0 \leq \text{問題 (11) の最適値} \tag{12}$$

が成り立つ．また，問題 (10) と (11) の最適解は，目的関数の係数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{c}}$ を制約条件の行列によって定まる部分空間に直交射影することにより，簡単に求めることができる．その結果を下の補題 1.6 に述べる．

補足説明 1.5 最適化問題の緩和問題とは，目的関数が等しいが，制約領域がより広くなった問題をいう．例えば，集合 A が集合 B の部分集合であるとき，集合 B 上で関数 $f(x)$ の最小値を求める問題は，集合 A 上で関数 $f(x)$ の最小値を求める問題の緩和問題である．このとき，

$$\text{集合 } B \text{ 上での関数 } f(x) \text{ の最小値} \leq \text{集合 } A \text{ 上での関数 } f(x) \text{ の最小値}$$

が成立する．整数計画問題あるいは非線形計画問題などでは，最適値の下界を求めるために，緩和問題がよく利用される．

補題 1.6 問題 (11) の最適解は，単位行列を $\boldsymbol{E}$ とし，

$$\boldsymbol{d} = \left(\boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1} \tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{n} \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T \right) \tilde{\boldsymbol{c}} \tag{13}$$

とすれば，$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\|$ である．問題 (10) の最適解は，$\boldsymbol{e} - n\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\|$ である．なお，$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d} = 0$ であり，もし $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}$ は問題 (8) の最適解である．

証明 ベクトル $\boldsymbol{d}$ について，$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{e} = 0$ より

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{d} &= \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1} \tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{n} \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T)\tilde{\boldsymbol{c}} \\ &= \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{c}} - \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{c}} - \frac{1}{n}(\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}^T\tilde{\boldsymbol{c}} \\ &= 0 \\ \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1} \tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{n} \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T)\tilde{\boldsymbol{c}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{e}^T\tilde{\boldsymbol{c}} - 0 - \frac{1}{n}(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}^T\tilde{\boldsymbol{c}} \\
&= 0 \\
\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{d}^T(\boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{n}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T)\tilde{\boldsymbol{c}} \\
&= \boldsymbol{d}^T\tilde{\boldsymbol{c}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u}^* &= \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{e} - \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \\
&= 0 \\
\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u}^* &= \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \\
&= n \\
\|\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{e}\| &= \|-\boldsymbol{d}\|/\|\boldsymbol{d}\| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となるので，$\boldsymbol{u}^*$ は問題 (11) の実行可能解である．また，問題 (11) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{u}$ に対して，$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} = n$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e})^T\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{d} \\
&= \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{n}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T)\tilde{\boldsymbol{c}} \\
&= \boldsymbol{u}^T\tilde{\boldsymbol{c}} - \frac{1}{n}(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}^T\tilde{\boldsymbol{c}} \\
&= \tilde{\boldsymbol{c}}^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}\| \leq 1$ であることに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{u}^* &= \tilde{\boldsymbol{c}}^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}) - \tilde{\boldsymbol{c}}^T(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{e}) \\
&= (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e})^T\boldsymbol{d} + \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \\
&\geq -\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}\|\|\boldsymbol{d}\| + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

が成り立つので，$\boldsymbol{u}^*$ は問題 (11) の最適解である．同様に，$\boldsymbol{e} - n\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\|$ は，問題 (10) の最適解である．

もし，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ であるならば，2 つ上の関係式より $\tilde{\boldsymbol{c}}^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e})^T\boldsymbol{d} = 0$ となり，問題 (11) の目的関数値が任意の実行可能解で等しい ($\tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{e}$) ことになり，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}$ も問題 (8) の最適解である． ▮

この補題の結果と不等式 (12) から，次の結果が得られる．

補題 1.7 式 (13) で定義される $\boldsymbol{d}$ と $\alpha \in [0,1]$ に対して,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} - \alpha \boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \tag{14}$$

とすれば, $\boldsymbol{u}$ は問題 (8) の実行可能内点であり,

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{u} \leq (1 - \alpha/n)\tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{e} \tag{15}$$

が成立する.

証明 実行可能解であることは, 補題 1.6 より明らかである. また, 補題 1.6 と不等式 (12) より

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^T (\boldsymbol{e} - n\boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\|) \leq 0$$

である. この不等式から

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \geq \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{e}/n$$

が得られるので,

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{e} - \alpha \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{d}/\|\boldsymbol{d}\| \leq (1 - \alpha/n)\tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{e}$$

が成立する. ▌

この補題より, 問題 (8) の内点を式 (14) によって更新することにより, 目的関数値の減少が (15) により保証できる. Karmarkar 法は, これを採用し, 式 (14) で $\boldsymbol{u}$ を更新する. 更新した $\boldsymbol{u}$ から逆変換により $\boldsymbol{x}$ を求め, それを $\boldsymbol{x}^{k+1}$ として採用する. 以上のことから, Karmarkar 法は, 次のようになる.

アルゴリズム 1.8 Karmarkar 法は, 次のステップから成る.

ステップ 0　問題 (1) の初期内点を $\boldsymbol{x}^0$ とし, $k = 0$, $\alpha \in (0,1)$ とする.

ステップ 1　点 $\boldsymbol{x}^k$ から式 (7) により $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k$ と $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{c}$ を計算する. 式 (13) により $\boldsymbol{d}$ をもとめ, 式 (14) により $\boldsymbol{u}$ を計算する.

ステップ 2　逆変換 (4) により $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{x}$ を求め, それを $\boldsymbol{x}^{k+1}$ とする. 反復回数 k を 1 増加し, ステップ 1 へ戻る.

このアルゴリズムは, 各反復で射影変換した問題の目的関数が減少するが, 元の問題 (1) の目的関数値が減少するとは限らない. したがって, ここまでの議論だけでは, ステップサイズ α の決め方が不明であり, 生成した点列が元の問題の最適解に近づくかどうかもわからない. この辺りのことは, 1.3 節以降で解説する.

1.2 内点の更新例

この節では，次の問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 36x_1 + 72x_2 - 36x_3 \\
\text{制約条件} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{array}
\tag{16}
$$

を例として，Karmarkar 法による内点の更新を具体的に示す．これは,

$$
\boldsymbol{A} = (1, 1, -1, -1),\ \boldsymbol{c} = (36, 72, -36, 0)^T
$$

とすれば，問題 (1) の形をしているので，Karmarkar 法を適用できる．ちなみに，最適解は, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 2, 0)$ であり, 最適値が 0 である．初期内点を $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (3/2, 1/2, 1, 1)$ とする．射影変換は,

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{4}{(2/3)x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4} \begin{pmatrix} (2/3)x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

であり，その逆変換は

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{4}{(3/2)u_1 + (1/2)u_2 + u_3 + u_4} \begin{pmatrix} (3/2)u_1 \\ (1/2)u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}
$$

である．

初期内点を $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (3/2, 1/2, 1, 1)$，$\alpha = 1/2$ として，Karmarkar 法による反復計算を実行する．まずはじめに，式 (7) より

$$
\tilde{A} = (3/2, 1/2, -1, -1),\ \tilde{\boldsymbol{c}} = (54, 36, -36, 0)^T
$$

を計算する．式 (13) より $\boldsymbol{d}$ を計算するために,

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{2}
$$

を前もって求めると

$$
\boldsymbol{d} = \tilde{\boldsymbol{c}} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1} \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{c}} - \frac{1}{n}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T\tilde{\boldsymbol{c}}
$$

$$= \begin{pmatrix} 54 \\ 36 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}(81+18+36)\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{54+36-36}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -39 \\ 33 \end{pmatrix}$$

と計算できる．ここで，

$$\|\boldsymbol{d}\| = 32$$

となるので，式 (14) により $\boldsymbol{u}$ を計算すると

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{64}\begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -39 \\ 33 \end{pmatrix} = \frac{1}{128}\begin{pmatrix} 137 \\ 113 \\ 167 \\ 95 \end{pmatrix}$$

となる．これから，逆変換により $\boldsymbol{x}^1$ を求めると

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \end{pmatrix} = \frac{4}{(3/2)137+(1/2)113+167+95}\begin{pmatrix} (3/2)137 \\ (1/2)113 \\ 167 \\ 95 \end{pmatrix} = \frac{1}{262}\begin{pmatrix} 411 \\ 113 \\ 334 \\ 190 \end{pmatrix}$$

となる．以上が，Karmarkar 法による 1 反復である．この $\boldsymbol{x}^1$ を新しい内点として，アルゴリズムを続けることができる．

1.3 ポテンシャル関数

Karmarkar 法によって生成される点列が問題 (1) の最適解に近づくことを示すために，問題 (1) の実行可能内点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ に対して，

$$f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = n \log \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{n} \log x_i = \log \frac{(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x})^n}{\Pi_{i=1}^n x_i}$$

を導入する．この関数 $f_{\boldsymbol{c}}$ を **Karmarkar のポテンシャル関数**と呼ぶ．

補題 1.9 任意の $\epsilon > 0$ と問題 (1) の実行可能内点 $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) \leq n \log \epsilon \text{ ならば } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \epsilon$$

である．

証明 相加相乗平均の不等式より，$(\Pi_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}/n$ が成り立ち，$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = n$ であるので

$$\sum_{i=1}^n \log x_i = \log \Pi_{i=1}^n x_i \leq \log(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}/n)^n = 0$$

である．これより，$f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) \geq n \log \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ となり，補題の結果が成り立つ． ▌

この補題より，ポテンシャル関数値が十分小さい実行可能解 $\boldsymbol{x}$ を求めることができれば，問題 (1) の近似解が得られる．

射影変換された空間における変数 $\boldsymbol{u}$ のポテンシャル関数を

$$f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) = n \log \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^n \log u_i \tag{17}$$

と定義する．ここに，射影変換の式 (2) を代入し，$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{c}$ を使うと

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) &= n \log \frac{n\tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}} - \sum_{i=1}^n \log \frac{nx_i/x_i^k}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}} \\
&= n\log n + n \log \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x} - n \log \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n (\log n + \log x_i - \log x_i^k - \log \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{x}) \\
&= n \log \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^n (\log x_i - \log x_i^k) \\
&= f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^n \log x_i^k
\end{aligned}$$

となる．これより，$\boldsymbol{x}$ でのポテンシャル関数の値と $\boldsymbol{x}$ を射影変換した $\boldsymbol{u}$ でのポテンシャル関数の値の間には，常に一定の差 $\sum_{i=1}^n \log x_i^k$ があることがわかる．したがって，射影変換した空間でポテンシャル関数 $f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u})$ の値を一定値下げることができれば，元の空間でもポテンシャル関数 $f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x})$ の値を一定値下げられる．このことを，式を使って示す．上の関係式は，任意の $\boldsymbol{x}$ とそれを射影変換した $\boldsymbol{u}$ に対して成り立つので，特に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k$ と $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}$ を代入すると，

$$f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{e}) = f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^k) + \sum_{i=1}^n \log x_i^k$$

となる．したがって，この両辺からその上の式の両辺を差し引くことにより

$$f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{e}) - f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) = f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^k) - f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x})$$

が得られる．ゆえに，各反復においてこの左辺の差が一定値以上あれば，ポテンシャル関数値を減少する点列を求めることができる．以下では，Karmarkar 法の各反復でステップサイズ α を 1/2 にとれば，この左辺が 1/4 以上であることを示す．

ポテンシャル関数の値を評価するために，次の初等的な結果を示す．

補題 1.10 $|t| < 1$ ならば $\log(1+t) \le t$ である．また，$t \in (0,1)$, $|t_i| \le t$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^T$ ならば，

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1+t_i) \ge \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{t} - \frac{\|\boldsymbol{t}\|^2}{2(1-t)}$$

である．

証明 対数関数の展開式より

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$$

である．したがって，前者は明らかである．後者は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log(1+t_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \frac{t_i^2}{2} + \frac{t_i^3}{3} - \cdots \right) \\
&\ge \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|t_i|^2}{2} + \frac{|t_i|^3}{2} + \cdots \right) \\
&\ge \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^2}{2} (1 + t + \cdots) \\
&= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{t} - \frac{\|\boldsymbol{t}\|^2}{2(1-t)}
\end{aligned}$$

より得られる．∎

定理 1.11 $\alpha = 1/2$ とすれば，Karmarkar 法の各反復で

$$f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^k) - f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^{k+1}) = f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{e}) - f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) \ge 1/4$$

が成立する．

証明 ポテンシャル関数の定義 (17) より，

$$f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{e}) - f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) = \left(n \log \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{e} - \sum_{i=1}^{n} \log 1 \right) - \left(n \log \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{n} \log u_i \right)$$

$$= -n\log\frac{\tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{u}}{\tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{e}} + \sum_{i=1}^{n}\log u_i$$

となる．不等式 (15) と $\boldsymbol{u}$ の式 (14) を使うと

$$f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{e}) - f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) \geq -n\log\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\alpha\frac{d_i}{\|\boldsymbol{d}\|}\right)$$

となる．さらに，補題 1.10 を使うと

$$f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{e}) - f_{\tilde{\boldsymbol{c}}}(\boldsymbol{u}) \geq \alpha - \alpha\frac{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$$

となる．ここで，補題 1.6 より $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d} = 0$ であるので，$\alpha = 1/2$ とすれば, ポテンシャルの減少は 1/4 以上となる． ▮

定理 1.12 アルゴリズム 1.8(Karmarkar 法) において $\alpha = 1/2$ とすれば，高々 $k = \lceil 4(f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^0) - n\log\epsilon)\rceil$ 回の反復で，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \epsilon$ をみたす問題 (1) の実行可能解 $\boldsymbol{x}^k$ が求められる．ここで，$\lceil a\rceil$ は，a 以上の最小の整数を表す.

証明 定理 1.11 より

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^k) &\leq f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^0) - \frac{k}{4} \\ &\leq n\log\epsilon \end{aligned}$$

となる．したがって，補題 1.9 より，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k \leq \epsilon$ となる． ▮

理論的には，線形計画問題 (1) のサイズを L とするとき，$f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}^0) = O(nL)$ かつ $-\log\epsilon = O(L)$ となるので，Karmarkar 法の反復回数は，高々 $O(nL)$ となる．

1.4 標準形の線形計画問題に適用する場合

Karmarkar 法は，問題 (1) の形をした線形計画問題に適用される．したがって，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{18}$$

にそのままでは，Karmrkar 法を適用することができない．この標準形の問題が次の仮定をみたすとする．

仮定 1.13 最適解が存在し，その最適解 $\boldsymbol{x}$ が不等式 $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} \leq (n+2)M_1$ をみたし，最適値 w^* がわかっている．

最適解が存在する場合には，M_1 として十分大きな値をとることにより，不等式 $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} \leq (n+2)M_1$ が満たされていると仮定できる．最適値 w^* がわかっているという仮定は，たとえば線形計画問題の主問題と双対問題を組み合わせることにより，満たすことができる．

上記の仮定のもと，次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - (w^*/M_1)x_{n+1} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{b}/M_1)x_{n+1} = 0 \\ & x_{n+1} = M_1 \\ & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} + x_{n+1} + x_{n+2} = (n+3)M_1 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0 \end{array} \tag{19}$$

を人工的に作る．この問題には，$x_{n+1} = M_1$ が制約に入っているので，目的関数の最適値が 0 であり，1 番目の等式制約より，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる．したがって，上の問題の最適解を求めることにより，標準形の問題 (18) の関数値が w^* となる実行可能解，すなわち最適解が得られる．ここで，

$$y_i = x_i/M_1\ (i = 1, 2, \cdots, n+2)$$

という変数変換を行い，$x_i = M_1 y_i$ を上の問題 (19) に代入し，すべての式を M_1 で除することにより，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - (w^*/M_1)y_{n+1} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{b}/M_1)y_{n+1} = 0 \\ & y_{n+1} = 1 \\ & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} + y_{n+1} + y_{n+2} = n+3 \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ y_{n+1} \geq 0,\ y_{n+2} \geq 0 \end{array} \tag{20}$$

が得られる．さらに，初期内点を得るために，十分大きな定数 M_2 と人工変数 y_{n+3} を導入し

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - (w^*/M_1)y_{n+1} + M_2 y_{n+3} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{b}/M_1)y_{n+1} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}/M_1)y_{n+3} = 0 \\ & y_{n+1} = 1 \\ & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = n+3 \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ y_{n+1} \geq 0,\ y_{n+2} \geq 0,\ y_{n+3} \geq 0 \end{array} \tag{21}$$

とする．ここで，M_2 として十分大きな値を使うことで，上の問題の最適解では，$y_{n+3} = 0$ となる．初期の実行可能内点は，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}$，$y_{n+1} = 1$，$y_{n+2} = 1$，$y_{n+3} = 1$ である．問題

(21) には，$y_{n+1}=1$ という制約式があるので，これを $n+3$ 倍したものを 4 番目の等式から差し引いた制約

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y}-(n+2)y_{n+1}+y_{n+2}+y_{n+3}=0$$

と差し替えることにより，右辺が 0 となる．以上で，仮定をみたし，初期内点が既知で，(1) の形をした線形計画問題を得ることができる．この問題を Karmarkar 法で解き最適解 y_i $(i=1,2,\cdots,n+3)$ を求めたとき，$y_{n+3}=0$ ならば $x_i=M_1y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が問題 (18) の最適解である．もし，$y_{n+3}>0$ ならば，問題 (18) が実行可能でないか，M_1 または M_2 が小さすぎることが考えられる．

参考文献

[1] Karmarkar, N., A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica* **4** (1984) 373-395

[2] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I，II，朝倉書店，2004