学習・研究用テキスト 内点法 (2A)

アフィンスケーリング法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

アフィンスケーリング法は，1967 年に Dikin[1] が提案した，最も単純な内点法である．標準形の線形計画問題の実行可能な内点列を生成する主アフィンスケーリング法，その双対問題の実行可能な内点列を生成する双対アフィンスケーリング法，主問題と双対問題の内点を同時に生成する主双対アフィンスケーリング法がある．ここでは，主アフィンスケーリング法を詳しく説明する．そして，主問題と双対問題の基底解が非退化であるという仮定のもとで，生成される点列が最適基底解に収束することを示す．また，双対アフィンスケーリング法についても，簡単に説明する．

目次

1 主アフィンスケーリング法

アフィンスケーリング法は，線形計画問題を解く方法として，1967 年に Dikin[1] により提案された．しかし，この解法が世に広まったのは，1984 年に Karmarkar が多項式オーダの内点法を提案し，多くの研究者が内点法に興味を持つようになってからである．アフィンスケーリング法は，内点を更新するときに，境界に近い内点であっても，アフィ

ン変換によりその内点を中心部に移してから探索方向を求めることにより，効率よく最適解を目指そうという方法である．

1.1 内点の更新

n 個の変数を持ち，m 個の等式制約を持つ標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

を解くアフィンスケーリング法を解説する．上の問題を主問題とすれば，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．

点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ は，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ をみたすならば，**内点**と呼ばれ，さらに $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすならば主問題 (1) の**実行可能内点**と呼ばれる．同様に，点 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$ は，$\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ をみたすならば，内点と呼ばれ，さらに $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}$ をみたすならば双対問題 (2) の実行可能内点と呼ばれる．

主アフィンスケーリング法では五つの仮定をするが，はじめの二つは，主アフィンスケーリング法を実行するために必要な仮定であり，あとの三つは，主アフィンスケーリング法で生成される点列が最適解に収束することを示すために必要である．まずはじめに，線形計画問題の基本的な仮定をおく．

仮定 1.1 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

次に，主アフィンスケーリング法では，開始するための初期の内点が必要なので，次の仮定を置く．

仮定 1.2 主問題の初期の実行可能内点 $\boldsymbol{x}^0$ が既知である．

主アフィンスケーリング法では，この内点 $\boldsymbol{x}^0$ を初期点として，1 つの内点から次の内点を計算することを繰り返すことにより，実行可能内点の列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ を生成する．ここで，$\mathcal{N}$ は自然数全体の集合をあらわす．今，k 番目の内点 $\boldsymbol{x}^k$ がすでに求められているとして，次の内点 $\boldsymbol{x}^{k+1}$ の計算方法を示す．

主アフィンスケーリングでは，点 $\boldsymbol{x}^k$ において探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を求め，あるステップサイズ α を定めて，次の点を

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$$

と計算する．この右辺の式を線形計画問題 (1) の $\boldsymbol{x}$ に代入すると，問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \alpha\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \alpha\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

が得られる．ここで，目的関数に定数項 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k$ は不要である．また，$\boldsymbol{x}^k$ が実行可能解なので，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b}$ より，上の等式は $\alpha\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と変形できる．ベクトル $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, x_2^k. \cdots, x_n^k)^T$ の各要素を対角要素とする対角行列を

$$\boldsymbol{X}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}^k) = \begin{pmatrix} x_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix}$$

と記し，すべての要素が 1 であるベクトル $(1, 1, \cdots, 1)^T$ を $\boldsymbol{e}$ と記せば，$\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{e}$ となる．上の問題 (3) を解きたいのであるが，ステップサイズ α は探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ に依存して決められるので，ここでは $\alpha = 1$ として探索方向を求めることにする．以上のことから，上の問題 (3) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ & -\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e} \end{array}$$

と同値である．この問題は簡単に解けないので，不等式条件 $-\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}$ をその十分条件である $\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| \leq 1$ に取り換えて，次の問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ & \|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| \leq 1 \end{array} \tag{4}$$

を考える．この問題は，変数ベクトル $\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}$ を新しい変数ベクトルに置き換えれば，線形制約をみたす部分空間上で，線形関数を最小化する単位ベクトルを求める問題となる．したがって，その目的関数の係数ベクトルを等式制約を満たす部分空間上に射影することにより，最適解を求めることができる．ここでは，下の定理 1.4 で結果を示し，実際に最適解となっていることを示し，その後に 1.2 節で求め方を説明する．定理 1.4 の前に，解の計算に必要な逆行列が存在することを次の補題で示す．

補題 1.3 仮定 1.1 がみたされ，$\boldsymbol{X}$ が正則な対角行列ならば，$m \times m$ 行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{A}^T$ は正則である．

証明 行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{A}^T$ が正則ではないならば，ある $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ が存在し，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となる．この両辺にベクトル $\boldsymbol{y}^T$ をかけると，$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\|^2 = 0$ となる．これは，仮定 1.1 に矛盾する． ▌

定理 1.4 問題 (4) の最適解は，$\boldsymbol{y}^k = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k$ に対して，$\boldsymbol{z}^k \neq \boldsymbol{0}$ ならば

$$\Delta\boldsymbol{x}^* = -\frac{\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{z}^k}{\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|}$$

となる．このとき，$\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^* = -\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\| < 0$ が成立する．また，$\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x}^k$ は主問題 (1) の最適解であり，逆に $\boldsymbol{x}^k$ が主問題 (1) の最適解ならば，$\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{0}$ である．

証明 補題 1.3 より，行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T$ が正則であるので，$\boldsymbol{y}^k$，$\boldsymbol{z}^k$ は計算可能である．また，$\boldsymbol{z}^k \neq \boldsymbol{0}$ と仮定すると，$\Delta\boldsymbol{x}^*$ も計算できる．$\Delta\boldsymbol{x}^*$ が問題 (4) の制約条件をみたすことは，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}^* &= -\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{z}^k \\
&= -\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c}) \\
&= -\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c} \\
&= \boldsymbol{0} \\
\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}^*\| &= 1
\end{aligned}$$

より導かれる．このとき，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^* &= (\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{y}^k)^T\boldsymbol{A})\Delta\boldsymbol{x}^* \\
&= -(\boldsymbol{z}^k)^T\frac{\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{z}^k}{\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|} \\
&= -\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|
\end{aligned}$$

となる．一方，問題 (4) の任意の実行可能解 $\Delta\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{y}^k)^T\boldsymbol{A})\Delta\boldsymbol{x} \\
&= -(\boldsymbol{z}^k)^T\Delta\boldsymbol{x} \\
&= -(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k)^T\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x} \\
&\geq -\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}|| \\
&\geq -\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\| \\
&= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^*
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\Delta\boldsymbol{x}^*$ は，問題 (4) の最適解である．また，$\boldsymbol{z}^k \neq \boldsymbol{0}$ と仮定しているので，$\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^* < 0$ となり，目的関数値が減少できるので $\boldsymbol{x}^k$ は最適解ではない．その対偶から，もし $\boldsymbol{x}^k$ が最適解ならば，$\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{0}$ である．

つぎに，$\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{0}$ であると仮定する．このとき，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{c}$ が成立する．したがって，$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす任意の $\Delta\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^k)^T\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = 0$ が得られる．つまり，2 つの実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ について $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = 0$ なので，$\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = 0$ となる．任意の実行可能解で目的関数値が等しくなるので，すべての実行可能解が最適解であり，$\boldsymbol{x}^k$ も最適解である． ▮

この定理で得られる解，すなわち問題 (4) の最適解 $\Delta\boldsymbol{x}^*$ を点 $\boldsymbol{x}^k$ における問題 (1) の**アフィンスケーリング方向**と呼ぶ.

アルゴリズム 1.5 主アフィンスケーリング法は，次のステップから成る．

ステップ 0　主問題 (1) の初期内点を $\boldsymbol{x}^0$ とし，$k=0$，$\alpha \in (0,1)$ とする．

ステップ 1　点 $\boldsymbol{x}^k$ において，定理 1.4 で定義されている $\boldsymbol{y}^k$，$\boldsymbol{z}^k$ を計算し，$\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{0}$ ならば終了する．さもなければ $\Delta\boldsymbol{x}^*$ を計算する．

ステップ 2　次の点を $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}^*$ とし，反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

実際の計算では，十分小さい $\epsilon > 0$ を用意して，$\|\Delta\boldsymbol{x}^*\| \leq \epsilon$ が成立した時点で，アルゴリズムを終了し，$\boldsymbol{x}^k$ を近似解とする．次節で無限に点列を生成した場合の収束について議論するので，ここでは，そのような終了条件を設定していない．また，ステップサイズ α は，1 以上にとることも可能である．$\boldsymbol{x}^k$ が内点のとき，ステップサイズ α を，$\boldsymbol{x}^{k+1} \geq \boldsymbol{0}$ をみたす最大の値

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha | \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}\} \tag{5}$$

に対して，定数 $\lambda \in (0,1)$ を使って，$\alpha = \lambda\bar{\alpha}$ とすることができる．この場合に**ロングステップアフィンスケーリング法**という．

次の補題は，基本的な結果を示している．

補題 1.6 主アフィンスケーリング法で生成した点列を $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ と $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in \mathcal{N}\}$ とすれば，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha)x_i^k \leq x_i^{k+1} \leq (1+\alpha)x_i^k, \quad i = 1,2,\cdots,n \\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}^k > \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1} = \alpha\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|$$

また，ロングステップアフィンスケーリング法の場合には, 一番上の不等式以外が成立し, 一番上の不等式の代わりに，次の不等式

$$(1-\lambda)x_i^k \leq x_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

が成り立つ.

証明 最初の $2n$ 個の不等式は，$\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}^*\| \leq 1$ と $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}^*$ より得られる．任意の i について，$x_i^k > 0$ ならば $x_i^{k+1} > 0$ なので，数学的帰納法により，すべての $\boldsymbol{x}^k > \boldsymbol{0}$ となる．二つの等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{c}$ は，$\boldsymbol{x}^k$ と $\boldsymbol{z}^k$ の定義より明らかに成り立つ．最後の等式は，定理 1.4 に述べられている $\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^* = -\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|$ を使うと

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1} = -\alpha\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^* = \alpha\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|$$

より得られる．

ロングステップアフィンスケーリング法の場合には，式 (5) より

$$x_i^k + \bar{\alpha}\Delta\boldsymbol{x}_i^* \geq 0$$

であるので,

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \lambda\bar{\alpha}\Delta\boldsymbol{x}_i^* \geq (1-\lambda)x_i^k$$

が成立する． ▮

1.2 アフィンスケーリング方向の求め方

問題 (4) の最適解であるアフィンスケーリング方向は，定理 1.4 で与えられている．ここでは，問題 (4) を直接解くことによりその最適解を求める．問題 (4) において，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}$，あるいは $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}_k\tilde{\boldsymbol{x}}$ として，変数ベクトル $\Delta\boldsymbol{x}$ を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ に置き換えると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}_k\tilde{\boldsymbol{x}} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \\ & \|\tilde{\boldsymbol{x}}\| \leq 1 \end{array}$$

が得られる．ここで，$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{c}$，$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k$ とすれば,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \tilde{\boldsymbol{c}}^T\tilde{\boldsymbol{x}} \\ \text{制約条件} & \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \\ & \|\tilde{\boldsymbol{x}}\| \leq 1 \end{array} \tag{7}$$

となる．この問題は，部分空間 $T = \{\boldsymbol{u} | \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = 0\}$ 上で，線形関数 $\tilde{\boldsymbol{c}}^T\tilde{\boldsymbol{x}}$ を最小化する単位ベクトルを求める問題である．その解 $\tilde{\boldsymbol{x}}^*$ は，係数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{c}}$ を部分空間 T に射影したベクトル $\boldsymbol{u}$ を長さ 1 にして逆符号にすれば求められる．したがって，単位行列を $\boldsymbol{E}$ とすれば，部分空間 T への射影行列が

$$\boldsymbol{P}_T = \boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{E} - \tilde{\boldsymbol{A}}^T(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}})\tilde{\boldsymbol{c}} \\ &= \boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$\tilde{\boldsymbol{x}}^* = -\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|$ であり，

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{X}_k\tilde{\boldsymbol{x}}^* \\ &= -\frac{\boldsymbol{X}_k^2(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c})}{\|\boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c})\|}\end{aligned}$$

となり，定理 1.4 と同じ結果が得られる．

補足説明 1.7 部分空間への射影行列について説明する．$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とし，そのランクが m であるとする．$\boldsymbol{A}$ の各行ベクトルと直交するベクトルからなる $\mathcal{R}^n$ の部分空間は,

$$T = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とあらわすことができる．その直交補空間は，行列 $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルの張る部分空間であり

$$T^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^m\}$$

とあらわすことができる．任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ は，T への直交射影 $\boldsymbol{u}$ と $T^{\perp}$ への直交射影 $\boldsymbol{v}$ の和としてあらわすことができるので

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$$

となる．これより，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

が得られる．したがって，$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{u} = (I - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}$ となる．このとき，$\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{u}$ に変換する行列

$$\boldsymbol{P}_T = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}$$

を部分空間 T への射影行列という．また，$\boldsymbol{P}_{T^{\perp}} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}$ を部分空間 $T^{\perp}$ への射影行列という．

1.3 主アフィンスケーリング法による内点の更新例

標準形の線形計画問題の例を

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{8}$$

とする．この問題の内点解 $\boldsymbol{x}^0 = (1,1,1,1)^T$ が求められているとして，$\alpha = 1/2$ のときに，アフィンスケーリング法による次の点を計算する．$X_0 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}^0)$ が 4×4 の単位行列となるので，ベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ は，一次方程式系

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解であるから，$\boldsymbol{y} = (-13/41, -9/41)^T$ となる．これより

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{41} \\ -\frac{9}{41} \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = -\frac{\boldsymbol{X}_0^2 \boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{z}\|} = -\frac{1}{\sqrt{287}} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，次の点は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{287}} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

である．

注意 1.8 ベクトル $\boldsymbol{y}^k = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c}$ は，逆行列 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$ を求めて計算するのではなく，上の例でみたように一次方程式系 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{c}$ を解くことにより計算する．問題が大きくなると，逆行列の計算は，一次方程式系の解の計算に比べ，かなり多くの計算量を必要とする．

1.4 生成される点列の収束

この節では，主アフィンスケーリング法で生成される点列が最適解に収束することを示す．そのために，次の 3 つの仮定を (1.1 節の仮定に加えて) 置く．

仮定 1.9 主問題 (1) に最適解が存在し，最適解の集合が有界である．

仮定 1.10 任意の主実行可能基底解は非退化 (基底変数の値がすべて正) である．このとき，すべての主実行可能基底解における基底変数の最小値が存在するので，それを $\delta > 0$ とする．

仮定 1.11 任意の主実行可能基底解に対応する双対基底解は非退化 (非基底変数に対応する z_i の値がすべて正) である．

注意 1.12 仮定 1.11 が満たされているとき，主問題の最適解が存在するならば唯一つであるので，最適解集合が有界であるといえるが，そのことを明確にするために，仮定 1.9 でも有界性を述べている．また，仮定 1.11 が満たされていれば，内点が最適解となることはないので，主アフィンスケーリング方向は，常に計算でき，$\mathbf{0}$ とはならない．

これらの仮定うち，非退化の仮定がなくとも，ステップサイズに条件を付ければ，主アフィンスケーリング法により最適解が得られることが知られている．その場合の証明はかなり複雑になるので，ここでは，簡単のため上記の仮定を置く．

まず，これらの仮定のもとで得られる重要な結果を 2 つの補題で述べる．これらの補題の結果は，主アフィンスケーリング法とは独立に得られる．

補題 1.13 仮定 1.9 のもとで，任意の σ に対して，目的関数値が σ 以下である実行可能領域

$$F(\sigma) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \le \sigma,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}\}$$

は有界閉集合である．

証明 $F(\sigma)$ は明らかに閉集合である．$F(\sigma)$ が空集合であるならば有界なので，$\boldsymbol{x}' \in F(\sigma)$ が存在するとする．集合 $F(\sigma)$ が有界でないと仮定し，矛盾を導くことで，有界であることを証明する．

$F(\sigma)$ が有界でない多面体なので，ある方向 $\Delta\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在し，任意の $\alpha \geq 0$ に対して，$\boldsymbol{x}' + \alpha\Delta\boldsymbol{x} \in F(\sigma)$，つまり

$$\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}' + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) \leq \sigma,\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}' + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}' + \alpha\Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

となる．$\alpha \geq 0$ が任意であるから,

$$\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} \leq 0,\ \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

が得られる．したがって，任意の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ と $\alpha \geq 0$ に対して，$\boldsymbol{x}^* + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$ も最適解となるので，仮定 1.9 に矛盾する． ▌

補題 1.14 行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i $(i \in \mathcal{N}_n)$ 列を $\boldsymbol{a}_i$ とする．仮定 1.10 が満たされているとする．主問題の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}'$ の正の要素数は m 以上である．$\boldsymbol{x}'$ の正の要素の添え字集合を $I' = \{i \mid x'_i > 0\}$ とするとき，要素数が m の部分集合 $\bar{I} \subset I'$ が存在し，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ が（一次独立な）基底ベクトルとなり，対応する基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が実行可能基底解となる．

証明 ベクトル $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)^T$ の要素のうち，k 個の要素が正であり，その他が 0 であるとする．議論の簡単のため，はじめの k 個の要素 x'_i $(i \in I' = \{1, 2, \cdots, k\})$ が正であり，$x'_i = 0$ $(i = k+1, k+2, \cdots, n)$ とする．

ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in I')$ が一次従属ならば，正の要素の添え字集合が I' の真部分集合となる実行可能解 $\boldsymbol{x}''$ が存在することを示す．実際，$\boldsymbol{a}_i$ $(i \in I')$ が一次従属なので，すべてが 0 でない $\Delta x'_i$ $(i \in I')$ が存在し,

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta x'_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

となる．$\Delta x'_i = 0$ $(i = k+1, k+2, \cdots, n)$ として，n 次のベクトル $\Delta\boldsymbol{x}' = (\Delta x'_1, \cdots, \Delta x'_n)^T$ を定義する．このとき，ある α' が存在して，$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}' + \alpha'\Delta\boldsymbol{x}'$ が実行可能でかつある要素 $x'_i + \alpha'\Delta x'_i$ $(i \in I')$ が 0 となる．

上の操作を繰り返すことにより，正の要素の添え字集合が I' の部分集合 $\bar{I}$ であり，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ が一次独立であるような実行可能解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が存在する．また，この操作をしなくとも，はじめからベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in I')$ が一次独立ならば，$\bar{I} = I'$ かつ $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}'$ であるとする．

$\bar{\boldsymbol{x}}$ のすべての正の要素に対応するベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ が一次独立であるので ($|\bar{I}| < m$ ならば適当なベクトル $\boldsymbol{a}_i$ を加え，基底ベクトルを生成することにより)，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は実行可能基

底解である．仮定 1.10 より，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の正の要素の数は m であり，集合 $\bar{I}$ の要素数も m である．∎

さて，準備が整ったので，次の定理を証明する．

定理 1.15 主問題 (4) が 5 つの仮定 1.1，1.2，1.9，1.10，1.11 をみたすならば，アルゴリズム 1.5 により生成される点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ は主問題の最適解に収束し，点列 $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in \mathcal{N}\}$ は双対問題の最適解に収束する．ここで，$\mathcal{N}$ は自然数全体の集合をあらわす．

証明 $\mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．次の順で定理を証明する．

1. 目的関数値が単調に減少する，すなわち，任意の $k \in \mathcal{N}$ に対して，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k > \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1}$ となる．
2. $\boldsymbol{x}^k$ と $\boldsymbol{z}^k$ の各要素 $i \in \mathcal{N}_n$ の積の数列 $\{x_i^k z_i^k | k \in \mathcal{N}\}$ は 0 に収束する．
3. 点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ が有界であり，集積点が存在する．任意の集積点 $\boldsymbol{x}'$ は実行可能解であり，ある部分点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in J\}$ が存在し，$\boldsymbol{x}'$ に収束する．
4. 点 $\boldsymbol{x}'$ の正である要素の添え字集合を I' とするとき，要素数が m である部分集合 $\bar{I} \subset I'$ が存在し，x_i $(i \in \bar{I})$ を基底変数とする実行可能基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が存在する．
5. 主問題の基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に対応する双対問題の基底解を $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ とすれば，部分点列 $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in J\}$ が点 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ に収束する．
6. $I' = \bar{I}$ $(\boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}})$ であり，部分点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in J\}$ が実行可能基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する．
7. 点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ が実行可能基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する．
8. 点列 $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in \mathcal{N}\}$ が基底解 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ に収束する．
9. 点 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ は，双対問題の実行可能基底解である．
10. $\bar{\boldsymbol{x}}$ と $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ は，それぞれの問題の最適解である．

1 番目の結果は，補題 1.6 より，すぐに得られる．これより，数列 $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ は，単調減少し，下界が存在するので，ある値 w^* に収束する．したがって，目的関数値の差は 0 に収束し，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1} = -\alpha\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}^* = \alpha\|X_k\boldsymbol{z}^k\|$$

であるから，数列 $\{\|X_k\boldsymbol{z}^k\| | k \in \mathcal{N}\}$ が 0 に収束する．これより，ベクトル $X_k\boldsymbol{z}^k$ の各要素からなる数列 $\{x_i^k z_i^k | k \in \mathcal{N}\}$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ も 0 に収束する．

生成される点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ は，不等式 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0$ をみたすので，補題 1.13 より，有界閉集合上の点列である．したがって，点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ に集積点が存在する．任意の

集積点 $\boldsymbol{x}'$ に対して，ある部分列 $\{\boldsymbol{x}^k|k \in J\}$ が存在し，$\boldsymbol{x}'$ に収束する．各 $\boldsymbol{x}^k$ が実行可能解なので，その集積点 $\boldsymbol{x}'$ も主問題の実行可能解である．

ベクトル $\boldsymbol{x}'$ の要素が正となる添え字の集合を $I' = \{i|x'_i > 0\}$ とする．補題 1.14 より，要素数が m の部分集合 $\bar{I} \subset I'$ が存在し，$\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ を基底ベクトル，すなわち x_i $(i \in \bar{I})$ を基底変数とする実行可能基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が存在する．

任意の $i \in \bar{I} \subset I'$ に対して，数列 $\{x_i^k|k \in J\}$ が正の値 x'_i に収束し，$x_i^k z_i^k \to 0$ であるので，数列 $\{z_i^k|k \in J\}$ は 0 に収束する．$z_i^k = c_i - \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y}^k$ なので，

$$\forall i \in \bar{I},\ \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{y}^k \to c_i \text{ as } k \to \infty\ (k \in J)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ が基底ベクトルなので，方程式系

$$\boldsymbol{a}_i^T \bar{\boldsymbol{y}} = c_i,\ i \in \bar{I}$$

あるいは $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ を並べた基底行列 $\boldsymbol{A}_{\bar{I}}$ を使って表現した

$$\boldsymbol{A}_{\bar{I}}^T \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}_{\bar{I}}$$

は唯一の解 $\bar{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{A}_{\bar{I}}^T)^{-1} \boldsymbol{c}_{\bar{I}}$ を持つ．部分点列 $\{\boldsymbol{y}^k|k \in J\}$ はこの $\bar{\boldsymbol{y}}$ に収束し，部分点列 $\{\boldsymbol{z}^k|k \in J\}$ は $\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T \bar{\boldsymbol{y}}$ に収束する．この $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ は，$\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \bar{I})$ を基底ベクトルとする双対問題の基底解となっている．

$(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ が双対問題の基底解であるので，仮定 1.11 より，任意の $\bar{z}_i$ $(i \notin \bar{I})$ は 0 ではない．数列 $\{z_i^k|k \in J\}$ が $\bar{z}_i \neq 0$ に収束し，$x_i^k z_i^k \to 0$ であるので，数列 $\{x_i^k|k \in J\}$ は 0 に収束する．したがって，$x'_i = 0$ $(i \notin \bar{I})$ である．これより，ベクトル $\boldsymbol{x}'$ の正の要素数が高々 m であり，$\boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}$ となる．以上のことから，部分点列 $\{\boldsymbol{x}^k|k \in J\}$ の集積点 $\boldsymbol{x}'$ は主問題の実行可能基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ である．同じ議論から，点列 $\{\boldsymbol{x}^k|k \in \mathcal{N}\}$ の任意の集積点が主問題の実行可能基底解となる．

ここで，点列 $\{\boldsymbol{x}^k|k \in \mathcal{N}\}$ に集積点が二つ以上あると仮定し，矛盾を導く．仮定 1.10 で定めた $\delta > 0$ に対して，$\epsilon = \delta/4$ とする．点列 $\{\boldsymbol{x}^k|k \in \mathcal{N}\}$ の任意の集積点が基底解であるので，すべての集積点の半径 ϵ の球体は互いに交わらず，それらの和集合に含まれない点 $\boldsymbol{x}^k$ の数は有限である．（もし無限ならば，そのような点の集積点が存在することになり，矛盾する．）したがって，ある K が存在し，任意の $k \geq K$ に対して，$\boldsymbol{x}^k$ はいずれかの集積点から距離が ϵ 以下の球体に含まれる．集積点が二つ以上あるので，ある k に対して，$\boldsymbol{x}^k$ と $\boldsymbol{x}^{k+1}$ は異なる集積点から半径 ϵ の球体に属する，すなわち，異なる集積点 $\bar{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{x}}$ が存在し，$\|\boldsymbol{x}^k - \bar{\boldsymbol{x}}\| \leq \epsilon$ かつ $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \hat{\boldsymbol{x}}\| \leq \epsilon$ となる．基底解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ の基底変数 x_i が存在し，それは基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ の非基底変数である．したがって，$\hat{x}_i \geq \delta$ かつ $\bar{x}_i = 0$ であり，

$x_i^{k+1} \geq \delta - \epsilon$ かつ $x_i^k \leq \epsilon$ である．また，補題 1.6 より，$x_i^{k+1} \leq (1+\alpha)x_i^k$ であるので

$$\delta - \epsilon \leq x_i^{k+1} \leq (1+\alpha)x_i^k \leq 2\epsilon \tag{9}$$

となるが，$\epsilon = \delta/4$ に矛盾する．

したがって，点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ は，1 つの実行可能基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する．このとき，上の議論で得た，点列 $\{\boldsymbol{y}^k | k \in J\}$ は $\bar{\boldsymbol{y}}$ に収束し，点列 $\{\boldsymbol{z}^k | k \in J\}$ は $\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T \bar{\boldsymbol{y}}$ に収束するという結果は，全点列で成り立つので，点列 $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in \mathcal{N}\}$ は，双対基底解 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ に収束する．

もし，双対基底解 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ が実行可能解でないならば，ある $i \notin \bar{I}$ に対して，$\bar{z}_i < 0$ となる．したがって，ある K が存在し，任意の $k \geq K$ に対して，$z_i^k < 0$ となる．このとき，点列 $\boldsymbol{x}^k$ の更新式より，任意の $k \geq K$ に対して，$x_i^{k+1} > x_i^k$ となるが，これは数列 $\{x_i^k | k \in \mathcal{N}\}$ が $\bar{x}_i = 0$ に収束することに矛盾する．したがって，$(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ が双対実行可能基底解となり，相補条件を満たすので，$\bar{\boldsymbol{x}}$ と $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ はそれぞれ最適解となる． ▮

アルゴリズム 1.5 によって生成される点列の収束を証明したが，$\lambda \in (0,1)$ としたロングステップアフィンスケーリング法についても，最適解への収束が証明されている．また, 土谷, 村松 [3] は, 非退化の仮定が成り立たなくとも, $\lambda \in (0, 2/3]$ としたロングステップアフィンスケーリング法で生成される点列が最適解に収束することを証明している．

定理 1.15 では，$\alpha \in (0,1)$ としたが，α を 1 より大きくしても，上界があるならば，定理の証明を少し変えるだけで，生成される点列の収束を示すことができる．

定理 1.16 主問題 (4) が 5 つの仮定をみたすならば，アルゴリズム 1.5 において，各ステップで内点を生成し，ステップサイズ α に上界が存在するならば，生成される点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ は主問題の最適解に収束し，点列 $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in \mathcal{N}\}$ は双対問題の最適解に収束する．

証明 証明は，定理 1.15 の場合とほとんど同じである．違いは補題 1.6 の不等式が使えないことである．アルゴリズム 1.5 において，ステップサイズ α に上界 $\kappa > 0$ が存在し，各反復で $\alpha \leq \kappa$ かつ $\boldsymbol{x}^{k+1} > \boldsymbol{0}$ であるとする．このとき，

$$x_i^{k+1} \leq (1+\kappa)x_i^k$$

が成立する．したがって，定理 1.15 の証明において，$\epsilon = \delta/(\kappa+3)$ とするとき，証明の中の不等式 (9) の代わりに

$$\delta - \epsilon \leq x_i^{k+1} \leq (1+\kappa)x_i^k \leq (1+\kappa)\epsilon \tag{10}$$

が得られるが，これは $\epsilon = \delta/(\kappa+3)$ に矛盾する．この部分以外は，定理 1.15 と同じようにして，証明できる． ▌

2 双対アフィンスケーリング法

この節では，標準形の線形計画問題の双対問題と同じ形をした問題，すなわち制約式が不等式であらわされた線形計画問題を解くアフィンスケーリング法を解説する．

2.1 内点の更新

標準形の線形計画問題 (1) の双対問題 (2) を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．この問題の実行可能内点 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ とは

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}$$

をみたす点である．初期内点 $(\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)$ が与えられたとき，双対アフィンスケーリング法は，双対問題の内点列 $\{(\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)|k\in\mathcal{N}\}$ を生成する．

k 番目の内点 $(\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)$ が得られているとして，次の内点 $(\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})$ の求め方を説明する．探索方向を $(\Delta\boldsymbol{y}^k,\Delta\boldsymbol{z}^k)$，ステップサイズを α として，

$$(\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})=(\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)+\alpha(\Delta\boldsymbol{y}^k,\Delta\boldsymbol{z}^k)$$

と計算する．この右辺の関係式を双対問題の $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ に代入すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^k+\alpha\boldsymbol{b}^T\Delta\boldsymbol{y}^k \\ \text{制約条件} & (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{z}^k)+\alpha(\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}^k+\Delta\boldsymbol{z}^k)=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z}^k\geq\boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．主問題の場合と同様に，この問題を解くためには，$\alpha=1$ として

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\Delta\boldsymbol{y}^k \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}^k+\Delta\boldsymbol{z}^k=\boldsymbol{0} \\ & -\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}^k\leq\boldsymbol{e} \end{array}$$

が解ければよい．ここで，$\boldsymbol{Z}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z}^k)$ であり，$\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$ である．この問題の最後の不等式を，その十分条件 $\|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}^k\| \leq 1$ で置き換えることにより，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\Delta\boldsymbol{y}^k \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}^k + \Delta\boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{0} \\
 & \|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}^k\| \leq 1
\end{array}
$$

が得られる．この問題の最適解は,

$$\Delta\bar{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-2}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b},\ \Delta\bar{\boldsymbol{z}} = -\boldsymbol{A}^T\Delta\bar{\boldsymbol{y}}$$

に対して，$\Delta\bar{\boldsymbol{z}} \neq \boldsymbol{0}$ ならば

$$(\Delta\boldsymbol{y}^k, \Delta\boldsymbol{z}^k) = \frac{1}{\|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}\|}(\Delta\bar{\boldsymbol{y}}, \Delta\bar{\boldsymbol{z}})$$

となる．(各自確かめよ) もし，$\Delta\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$ ならば，$(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ は双対問題の最適解である．(各自確かめよ) さもなければ，ステップサイズを $\alpha \in (0, 1)$ として，次の点 $(\boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を計算する．また,

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{Z}_k^{-2}\boldsymbol{A}^T\Delta\bar{\boldsymbol{y}}$$

とすれば，実行可能とは限らないが，等式制約 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{b}$ をみたす主問題の解候補を計算できる．以上の計算を繰り返す双対アフィンスケーリング法は，次のように記述できる．

アルゴリズム 2.1 双対アフィンスケーリング法は，次のステップから成る．

ステップ 0　双対問題 (2) の初期内点を $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ とし，$k = 0$, $\alpha \in (0, 1)$ とする．

ステップ 1　点 $(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，上で定義されている $(\Delta\bar{\boldsymbol{y}}, \Delta\bar{\boldsymbol{z}})$ を計算し，$\Delta\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$ ならば終了する．さもなければ $(\Delta\boldsymbol{y}^k, \Delta\boldsymbol{z}^k)$ を計算する．主問題の解の候補である $\boldsymbol{x}^{k+1}$ も計算する．

ステップ 2　次の点を $(\boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) = (\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) + \alpha(\Delta\boldsymbol{y}^k, \Delta\boldsymbol{z}^k)$ とし，反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

補題 2.2 双対アフィンスケーリング法で生成される点列を $\{\boldsymbol{x}^k | k \in \mathcal{N}\}$ と $\{(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) | k \in \mathcal{N}\}$ とすれば，次のことが成り立つ．

$$
\begin{array}{l}
(1-\alpha)z_i^k \leq z_i^{k+1} \leq (1+\alpha)z_i^k, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{z}^k > \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^{k+1} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^k = \alpha\|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}\|
\end{array}
$$

証明 証明は，主問題の場合と同様なので，読者への課題とする． ▌

2.2 双対アフィンスケーリング法による点の更新例

1.3 節で扱った線形計画問題の例 (8) と同値な問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y_1 + y_2 \\ \text{制約条件} & 2y_1 + y_2 \leq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{array} \tag{11}$$

にスラック変数を導入すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y_1 + y_2 \\ \text{制約条件} & 2y_1 + y_2 + z_1 = 4 \\ & y_1 + 3y_2 + z_2 = 5 \\ & -y_1 + z_3 = 0 \\ & -y_2 + z_4 = 0 \\ & (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{12}$$

となる．この問題の内点解 $\boldsymbol{y}^0 = (1,1)^T$，$\boldsymbol{z}^0 = (1,1,1,1)^T$ が求められているとして，$\alpha = 1/2$ のときに，双対アフィンスケーリング法による次の点 $(y_1, y_2)^T$，$(z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ を計算する．$Z_0 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z}^0)$ は 4×4 の単位行列となる．また，双対問題 (2) と対応させると

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．ベクトル $\Delta\bar{\boldsymbol{y}} = (\Delta\bar{y}_1, \Delta\bar{y}_2)^T$ は，一次方程式系

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{Z}_0^{-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{y}_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の解であり，$\Delta\bar{\boldsymbol{y}} = (6/41, 1/41)^T$ となる．これより，

$$\Delta\bar{\boldsymbol{z}} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{41} \\ \frac{1}{41} \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\Delta \boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt{287}} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \Delta \boldsymbol{z} = \frac{1}{\sqrt{287}} \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{287}} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{287}} \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．1.3 節の結果と比べると，1.3 節での変数 x_1 と x_2 が，ここでの y_1 と y_2 に対応しているので，この例では更新式が同じになっている．

参考文献

[1] Dikin, I. I., Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming, *Soviet Mathematics Doklady* **8** (1967) 674-675.

[2] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I，II，朝倉書店，2004

[3] Tsuchiya, T. and Muramatsu, M.: “Global Convergence Result of a Long-Step Affine Scaling Algorithm for Degenerate Linear Programming Problems”, *SIAM Journal on Optimization* **5** (1995) 525-551.